

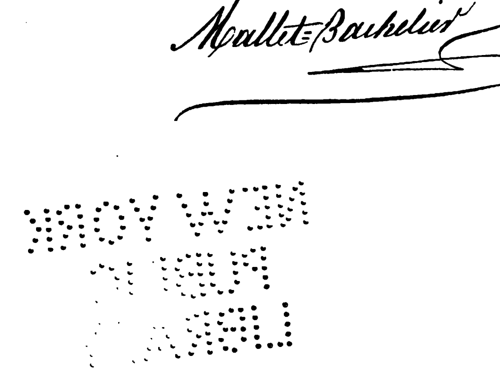
THÉORIE

DES

FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES

ET, EN PARTICULIER,

DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.



Paris — Imprimerie de MALLET-BACHELIER, rue du Jardinet, 12.

THÉORIE

DES

ONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES

ET, EN PARTICULIER,

DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR

M. BRIOT,

Professeur de mathématiques au Lycée Saint-Louis, Maître de Conférences à l'École normale supérieure,

ET

M. BOUQUET,

Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Louis-le-Grand, Répétiteur à l'École Polytechnique.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, 55.

1859

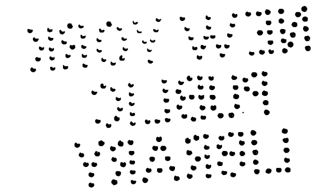


TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE I.

PRINCIPES.

CHAPITRE I. — Définitions.

CHAPITRE II. — Propriétés des séries ordonnées suivant les puissances entières et croissantes de la variable.

CHAPITRE III. — Développement des fonctions en séries ordonnées suivant les puissances entières de la variable.

CHAPITRE IV. — Propriétés générales des fonctions.

LIVRE II.

DES FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES.

CHAPITRE I. — Méthode générale pour l'étude des fonctions définies par les équations différentielles.

CHAPITRE II. — Application aux fonctions simplement périodiques.

CHAPITRE III. — Origine des fonctions doublement périodiques.

CHAPITRE IV. — Propriétés générales des fonctions doublement périodiques.

LIVRE III.

DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

CHAPITRE I. — De la fonction λ.

CHAPITRE II. — De la fonction μ.

CHAPITRE III. — De la fonction ν.

CHAPITRE IV. — Remarques sur les modules.

LIVRE IV.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS ELLIPTIQUES EN SÉRIES.

CHAPITRE I. — Développement des fonctions elliptiques en séries.

CHAPITRE II. — Développement des fonctions elliptiques en produits d'un nombre infini de facteurs.

CHAPITRE III. — Propriétés de la fonction Θ.

LIVRE V.

TRANSFORMATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

CHAPITRE I. — Addition des fonctions elliptiques.

CHAPITRE II. — Multiplication.

CHAPITRE III. — Division.

CHAPITRE IV. — Multiplication ou division de l'une des périodes d'une fonction elliptique par un nombre entier.

LIVRE VI.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES AU MOYEN DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

CHAPITRE II. — Étude de l'équation binôme $\left(\frac{du}{dz}\right)^m = f(u)$.

CHAPITRE III. — Exemples d'intégration par les fonctions elliptiques.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

PRÉFACE.

Dès les commencements du calcul intégral, les géomètres se sont aperçus qu'un grand nombre de quadratures ne peuvent être exprimées, sous forme finie, à l'aide des signes connus, et constituent en quelque sorte des transcendantes nouvelles. On intégra d'abord les fractions rationnelles et les expressions irrationnelles qui renferment la racine carrée d'un polynôme du premier ou du second degré; mais, dès que le degré du polynôme placé sous le radical surpasse deux, l'intégration devient impossible. On fit voir ensuite que toutes les quadratures, dans lesquelles le polynôme placé sous le radical est du troisième ou du quatrième degré, se ramènent à trois formes simples, auxquelles on donna le nom de *transcendantes elliptiques,* parce que l'une d'elles représente la longueur d'un arc d'ellipse.

Ces transcendantes occupèrent Legendre presque toute sa vie; car ses premiers travaux à ce sujet datent de 1786, et il ne publia qu'en 1825 son grand *Traité des fonctions elliptiques*. Legendre se proposait surtout de ramener les quadratures les unes aux autres par des transformations algébriques, afin de pouvoir calculer des tables numériques; il a découvert un grand nombre de transformations remarquables. Mais ces quadratures, telles qu'il les considérait, sont les inverses des fonctions elliptiques; aussi la double périodicité, qui est leur caractère distinctif, lui avait-elle échappé complétement.

Vers 1826, Abel, le premier, envisagea les fonctions elliptiques à leur vrai point de vue, et en reconnut la double périodicité. Trois ans plus tard, en 1829, Jacobi publia ses *Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum*. Le Traité de Jacobi ne renferme rien d'essentiel qui ne se trouve dans les Mémoires d'Abel, malheureusement interrompus par une mort prématurée. Sans chercher à établir la part qui revient à chacun de ces deux célèbres géomètres, nous ferons remarquer que la méthode d'Abel nous semble bien préférable à celle de Jacobi. Abel essaye de déduire les principales propriétés des fonctions elliptiques de leur caractère fondamental qui est la double périodicité, tandis que Jacobi n'y arrive que par des transformations algébriques, fort ingénieuses sans doute, mais qui présentent le grave inconvénient de ne pas faire comprendre la raison des théorèmes et de ne pas mettre sur la voie de découvertes ultérieures.

Malgré les remarquables travaux de ces deux grands géomètres, la théorie des fonctions elliptiques restait fort obscure et très-compliquée; ni la double périodicité n'avait été reconnue d'une manière nette, ni la fonction elle-même définie d'une manière rigoureuse. Il fallait, pour éclairer cette théorie, l'introduction d'une idée nouvelle en mathématiques, et c'est à l'illustre Cauchy que l'on doit cet important progrès.

Tous les géomètres savent les services qu'a rendus à l'algèbre la considération des quantités imaginaires; la théorie des équations n'a pu être établie qu'à cette condition. La considération des quantités imaginaires paraît devoir rendre à la théorie des fonctions des services plus grands encore. Mais, pour bien comprendre l'importance de cette idée, il convient, croyons-nous, de faire disparaître l'espèce d'antagonisme, ou d'opposition, que l'on a laissé sub-

sister jusqu'à présent entre ce que l'on a appelé les quantités *réelles* et les quantités *imaginaires*. Si, dans un plan, on prend un point fixe, que par ce point on mène un axe fixe, rien n'empêche de concevoir la quantité imaginaire comme une longueur portée à partir de l'origine dans une direction marquée par l'argument; la variation de cette grandeur *géométrique*, comme l'appelle Cauchy, sera figurée par le mouvement d'un point dans le plan. La variable réelle correspond au mouvement particulier du point mobile sur l'axe dans un sens ou dans l'autre.

Cette extension donnée à l'idée de grandeur résout bien des difficultés qui se sont présentées dans la théorie des fonctions, et dont il était impossible de se rendre compte tant qu'on laissait la variable réelle, c'est-à-dire tant qu'on assujettissait le point mobile à se mouvoir sur l'axe. Ainsi, quand on développe la fonction $\frac{1}{1+x^2}$ en série, on s'aperçoit que la série n'est convergente que pour les valeurs réelles de x comprises entre -1 et $+1$; dès que x dépasse 1, la série devient divergente, et cependant la fonction proposée reste finie et continue. A quoi cela tient-il? Nous avons fait voir qu'une série ordonnée suivant les puissances entières et croissantes de x est convergente tant que la variable reste dans l'intérieur d'un cercle décrit de l'origine comme centre; or, pour $x = \pm i$, la fonction devient infinie; le cercle de convergence a son rayon égal à un; voilà pourquoi la série cesse d'être convergente. Il en est de même de la fonction *arc tang* x; la série n'est convergente que pour les valeurs réelles comprises entre -1 et $+1$, et cependant la fonction reste finie et continue quand x dépasse 1; ceci tient à ce que pour $x = \pm i$, comme précédemment, la fonction devient infinie. Il résulte de là que, pour expliquer certaines propriétés des fonctions,

même quand on se borne au cas de la variable réelle, il est indispensable de rendre la variable imaginaire; en d'autres termes, les propriétés de la fonction, même quand le point mobile reste sur l'axe, n'apparaissent complétement que si l'on fait mouvoir la variable d'une manière quelconque dans le plan.

Lorsqu'on connaît l'intégrale indéfinie $F(x)$ d'une expression différentielle $f(x)\,dx$, et que la fonction $f(x)$ reste finie et continue pendant que la variable réelle x va de x_0 à x_1, on sait que l'intégrale définie $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$ est égale à la différence $F(x_1) - F(x_0)$ des valeurs de l'intégrale générale aux deux limites. Il peut arriver que la fonction $f(x)$ devienne infinie pour une valeur intermédiaire a; si les deux intégrales définies $\int_{x_0}^{a-\varepsilon} f(x)\,dx$, $\int_{a+\varepsilon'}^{x_1} f(x)\,dx$ tendent vers des limites finies et déterminées, quand ε et ε' tendent vers zéro, on représente la somme de ces deux limites par le symbole $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$, et cette somme est encore égale à la différence des valeurs de l'intégrale générale. Mais, quand les deux intégrales ne tendent pas vers des limites finies et déterminées, ce symbole n'a plus de sens, au point de vue de la variable réelle, et cependant l'intégrale générale donne toujours une différence finie $F(x_1) - F(x_0)$. Que représente cette différence? Si l'on rend la variable imaginaire et que l'on fasse aller cette variable du point x_0 au point x_1 suivant une courbe quelconque dans le plan, de manière toutefois à éviter le point a qui rend la fonction $f(x)$ infinie, l'intégrale curviligne aura un sens bien précis et elle sera encore donnée par la différence des valeurs de l'intégrale générale.

Nous citerons comme exemple l'intégrale définie $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$; l'expression différentielle $\frac{dx}{x}$ admet l'intégrale générale $log\, x + C$; la différence $\log 1 - \log(-1)$, c'est-à-dire $(2k+1)\pi i$, k étant un entier quelconque, donne les diverses valeurs de l'intégrale définie, quand la variable va de -1 à $+1$ en décrivant diverses courbes dans le plan. Cette remarque a été le point de départ des beaux travaux de Cauchy sur les intégrales définies.

Les fonctions, qui sont d'un usage ordinaire en mathématiques, se ramènent à deux catégories, celle des fonctions algébriques et celle des fonctions simplement périodiques. On ne voit bien les propriétés d'une fonction définie par une équation algébrique, et la manière dont elle acquiert des valeurs multiples, qu'en faisant mouvoir la variable dans le plan, ainsi que l'a montré M. Puiseux dans son important travail sur les fonctions algébriques. On peut à la vérité définir les fonctions simplement périodiques, comme le sinus, la tangente, etc., à l'aide d'un cercle, en laissant la variable réelle; toutefois, la variable imaginaire permet de faire rentrer les fonctions exponentielles dans la catégorie des fonctions simplement périodiques.

Les fonctions elliptiques appartiennent à une troisième catégorie, celle des fonctions doublement périodiques. Mais il nous paraît impossible de concevoir nettement ces fonctions, sans donner à la variable l'extension dont nous avons parlé. Conservant au mot *fonction* le sens habituel, nous dirons, avec Cauchy, qu'une quantité géométrique est fonction d'une autre, quand la variation de la première est déterminée par celle de la seconde. Que l'on se figure le plan divisé en parallélogrammes égaux par

deux séries de droites parallèles, et que l'on fasse mouvoir la variable dans le plan, la fonction sera doublement périodique si elle reprend la même valeur aux points correspondants des divers parallélogrammes.

Ce volume a pour objet principal l'étude des fonctions doublement périodiques. Il est divisé en six Livres. Dans le livre Ier, nous démontrons les principales propriétés des fonctions, au point de vue des variables géométriques. Dans le livre II, après avoir exposé une méthode générale pour étudier les fonctions définies par les équations différentielles, et appliqué cette méthode aux équations les plus simples qui donnent naissance à des fonctions doublement périodiques, nous démontrons les propriétés fondamentales de cette classe de fonctions. Déjà MM. Liouville et Hermite avaient considéré les fonctions doublement périodiques en elles-mêmes, et déduit du fait même de la double périodicité leurs propriétés les plus remarquables.

Les livres III, IV, V sont consacrés exclusivement aux fonctions elliptiques, à leur développement en séries et à leurs transformations. Nous définissons les fonctions elliptiques par des équations différentielles ; c'est ainsi qu'elles se présentent dans les applications, et d'ailleurs ce mode de génération met en évidence d'une manière très-simple leurs propriétés principales. A cause des difficultés très-grandes qu'a présentées jusqu'à présent l'étude directe de l'équation différentielle, plusieurs géomètres ont proposé de définir les fonctions elliptiques par des séries; sur la fin de sa vie, Jacobi avait eu l'idée de les considérer comme des quotients de certaines fonctions données par des produits d'un nombre infini de facteurs. Mais la difficulté n'en subsistait pas moins. Il restait toujours à

faire voir que toute équation différentielle de la forme convenable admet pour intégrale une fonction définie de la sorte. Nous avons donc préféré aborder directement l'étude des fonctions elliptiques par les équations différentielles, et nous croyons avoir fait disparaître toute espèce de difficulté à ce sujet.

La méthode que nous avons donnée pour l'étude des fonctions définies par des équations différentielles nous permet d'intégrer les équations différentielles à l'aide des fonctions elliptiques, lorsque cette intégration est possible. A l'inspection de l'équation différentielle, nous reconnaissons d'abord les principales propriétés de la fonction intégrale, sa nature, la catégorie à laquelle elle appartient. Si la fonction est algébrique, ou simplement périodique, nous l'obtenons à l'aide des signes élémentaires; lorsqu'elle est doublement périodique, nous l'exprimons, avec une égale facilité, à l'aide des fonctions elliptiques. Le livre VI traite de ce nouveau mode d'intégration par les fonctions elliptiques.

On rencontre fréquemment les fonctions elliptiques dans les questions de géométrie, de mécanique ou de physique mathématique. Nous citerons, comme exemples, le pendule ordinaire, le pendule conique, l'attraction des ellipsoïdes, le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, etc. M. Lamé a publié l'année dernière un ouvrage très-intéressant, où il montre comment les fonctions elliptiques s'introduisent dans les questions relatives à la distribution de la chaleur et aux surfaces isothermes. Nous ne nous sommes occupés dans ce volume que de la partie théorique. Il y aurait lieu de s'occuper de la construction des Tables et de la meilleure disposition à leur donner en vue de la pratique. Cette question,

avec les principales applications, pourra faire la matière d'un *second* volume.

Nous devons beaucoup à M. Liouville. Il y a quelques années, l'éminent géomètre prit pour sujet de son cours au Collége de France les *fonctions elliptiques*; ses savantes leçons ont été le point de départ de nos propres recherches.

Paris, le 14 décembre 1858.

THÉORIE

DES

FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES,

ET EN PARTICULIER

DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

LIVRE PREMIER

PRINCIPES.

Ce premier Livre contient les principes d'une nouvelle théorie des fonctions.

Nous adoptons les définitions données par M. Cauchy, et nous les expliquons par des exemples.

Nous étudions ensuite les propriétés des fonctions définies par des séries ordonnées suivant les puissances entières et croissantes de la variable.

Ceci nous permet d'établir, d'une manière nette et précise, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction se développe en série convergente suivant les puissances entières et croissantes de la variable. Nous faisons disparaître ainsi les nuages qui obscurcissaient encore le beau théorème de M. Cauchy.

Nous donnons ensuite les propriétés générales des fonctions, celles dont la connaissance sert, en quelque sorte, de fondement à cette nouvelle branche de l'analyse mathématique.

CHAPITRE PREMIER

DÉFINITIONS.

1. M. Cauchy définit de cette manière les fonctions d'une variable imaginaire. Soit

$$z = x + yi$$

la variable imaginaire; si l'on désigne par X et Y deux fonctions réelles quelconques des deux variables réelles x et y, la quantité

$$u = X + Yi$$

pourra être considérée comme une fonction de z; car, à chaque valeur de la valeur imaginaire z, c'est-à-dire à chaque système de valeurs des variables réelles x et y correspond un système de valeurs de X et de Y, et par conséquent une valeur de u.

La valeur imaginaire z est la réunion, au moyen du symbole $\sqrt{-1}$, que nous représentons par la lettre i, de deux variables réelles et indépendantes x et y. La variation de z est indéterminée, car on peut faire varier simultanément les deux variables x et y, en établissant entre elles telle relation que l'on voudra. Si les deux fonctions réelles X et Y varient d'une manière continue avec x et y, on dit que u est une fonction continue de z.

On se fait une idée très-nette de ce qui précède, en imaginant que x et y soient les coordonnées rectangulaires d'un point z du plan horizontal, la variation de z sera figurée par la courbe décrite par ce point. Que l'on conçoive, en outre, deux surfaces ayant pour ordonnées verticales, l'une X, l'autre Y, ces deux surfaces représenteront la fonction u; si le point z décrit dans le plan horizontal une certaine courbe, les extrémités des ordonnées verticales traceront, sur les surfaces, deux lignes dont l'ensemble indiquera la variation correspondante de la fonction u.

On peut aussi représenter la fonction u, comme la variable z, en supposant que X et Y soient les coordonnées rectangulaires d'un point u du plan horizontal. Quand le point z se meut sur une courbe, le point u décrit une courbe correspondante.

2. Concevons que la variable z reste comprise dans une certaine portion du plan ; si la fonction u acquiert la même valeur au même point, quel que soit le chemin suivi pour y arriver, sans sortir de la portion du plan considérée, M. Cauchy dit que la fonction est *monodrome* dans cette portion du plan. Il est clair que, si le point z décrit une courbe fermée quelconque dans la portion du plan considérée, la fonction u revient à la même valeur, en d'autres termes, le point u décrit aussi une courbe fermée.

Une fonction rationnelle de z est une fonction monodrome dans toute l'étendue du plan. Il en est de même lorsque X et Y sont deux fonctions rationnelles quelconques de x et y ; plus généralement, lorsque chacune des deux surfaces, par lesquelles nous représentons u couvre tout le plan horizontal par sa projection, et n'a qu'un point sur chaque verticale.

3. Considérons, comme exemple, la fonction définie par l'équation

$$u^2 = z + 1.$$

Nous supposons que, pour $z = 0$, on a $u = +1$; faisant varier z à partir du point O sur une courbe quelconque, nous suivons la variation de z par la continuité. Marquons le point A qui correspond à la valeur $z = -1$ (*fig.* 1). Deux chemins très-rapprochés OBM, OCM, allant du point O à un même point M du plan, et ne comprenant pas entre eux le point A, conduiront à une même valeur de u.

Fig. 1.

En effet, subdivisons les deux chemins en éléments correspondants très-petits Ob_1, $b_1 b_2$,...; Oc_1, $c_1 c_2$,...; si l'on va du point O au point voisin b_1 par le chemin Ob_1 ou par le chemin $Oc_1 b_1$, on arrivera à des valeurs de u peu différentes de la valeur initiale $u = +1$, et par conséquent peu différentes entre elles. Mais cette différence est rigoureusement nulle, car les deux racines de l'équation $u^2 = z + 1$ ayant entre elles au point b_1 une différence finie, on a nécessairement la même racine u_1. Partons maintenant du point b_1 avec la valeur u_1 de la fonction comme valeur initiale, et allons au point voisin b_2 par les deux chemins $b_1 b_2$, $b_1 c_1 c_2 b_2$; en vertu du même raisonnement, la fonction prendra au point b_2 la même valeur u_2 : mais quand on revient de b_1 en c_1, la fonction reprend en c_1 la valeur qu'elle avait en ce point, quand on allait de O en c_1; ainsi les deux chemins Ob_2, $Oc_2 b_2$, conduisent à la même valeur u_2 de la fonction en b_2. En continuant ainsi de proche en proche, on voit que les deux chemins OBM, OCM, conduisent à la même valeur de la fonction en M.

Il résulte de ce qui précède, que deux courbes quelconques allant du point O au point M, et telles, que l'on puisse, par déformations successives, transformer l'une dans l'autre sans passer par le point A, conduisent à la même valeur de la fonction au point M. Ainsi la fonction u est monodrome dans toute portion du plan qui ne comprend pas le point A, par exemple, dans le cercle décrit du point O avec un rayon plus petit que l'unité.

Supposons maintenant que l'on aille du point O à un point a voisin du point A (*fig.* 2), et que l'on décrive autour de ce point une courbe fermée très-petite $abcda$; les deux racines de l'équation différant très-peu l'une de l'autre dans le voisinage du point A, la fonction ne revient pas à la valeur qu'elle avait primitivement en A. En effet, si l'on pose

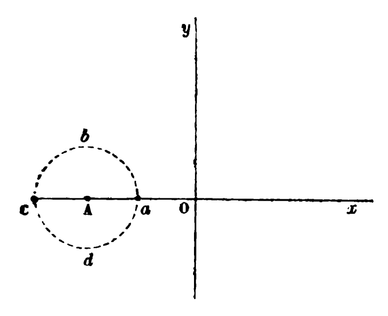
$$z = -1 + re^{\theta i},$$

on a

$$u = r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\theta}{2} i}.$$

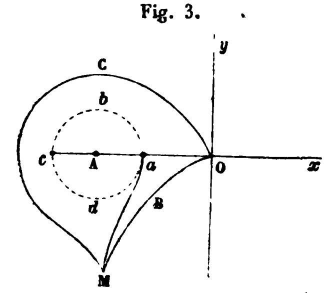
Quand z décrit la droite Oa, la valeur de la fonction reste réelle et positive et diminue de $+1$ à $+r^{\frac{1}{2}}$; quand z décrit ensuite la courbe fermée $abcda$, l'angle θ varie de o à 2π, la fonction u acquiert en a la valeur négative $r^{\frac{1}{2}}e^{\pi i}$ ou $-r^{\frac{1}{2}}$. Si l'on revient de a en O suivant la droite aO, la fonction reste négative et arrive en O avec la valeur -1, différente de la valeur initiale $+1$.

Fig. 2.



Il est aisé, d'après cela, de comprendre comment deux chemins OBM, OCM (*fig.* 3), comprenant entre eux le point A, conduisent à des valeurs très-différentes de la fonction. En effet, prenons un point a voisin de A et décrivons autour du point A une courbe fermée $abcda$; le chemin OBM peut être remplacé par le chemin OaM; de même, le chemin OCM par le chemin O$abcda$M; car, en déformant le dernier, on le ramène à OCM sans passer par le point A. Suivons maintenant ces deux chemins OaM, O$abcda$M, peu différents l'un de l'autre; de O en a les valeurs de la fonction sont les mêmes de part et d'autre. Quand, suivant le second chemin, z a décrit autour du point A la courbe fermée $abcda$, la fonction revient en a avec une valeur différente de celle qu'elle avait précédemment; on part donc du point a avec des valeurs différentes pour parcourir la même ligne aM, et les deux valeurs de la fonction diffèrent de plus en plus.

Fig. 3.



Ainsi la fonction cesse d'être monodrome dès que la portion du plan considérée comprend le point A. On peut classer les

chemins qui vont de l'origine à un point quelconque M du plan en deux catégories : ceux qui se ramènent au chemin rectiligne sans passer par le point A, et ceux qui ne peuvent s'y ramener qu'en passant une fois par le point A ; les premiers conduisent à la même valeur de la fonction au point M, les autres donnent une autre valeur à la fonction.

Nous avons vu qu'une circonférence décrite autour du point A change la valeur de la fonction. Un second tour reproduira la valeur primitive. Ainsi, tout chemin qui se ramène à un autre en passant deux fois par le point A, conduit à la même valeur de la fonction.

4. Une fonction implicite définie par une équation algébrique entre z et u, présente des circonstances analogues à celles dont nous venons de parler. On part d'un point déterminé $z = z_0$ avec une valeur initiale $u = u_0$, l'une des racines de l'équation pour $z = z_0$; le point z décrivant une certaine courbe, la fonction u varie d'une manière continue. Tant que l'on reste dans une portion du plan ne comprenant aucun point pour lequel la fonction u devient égale à une autre racine de l'équation, la fonction est monodrome. Elle cesse en général de l'être dès que l'on dépasse un de ces points. Les fonctions de ce genre sont l'objet d'un remarquable travail de M. Puiseux, qui a fait voir comment les racines de l'équation se permutent les unes dans les autres quand on tourne autour des points pour lesquels l'équation a des racines égales (*).

5. Prenons pour second exemple la fonction

$$u = \log(1 + z).$$

Nous supposons que l'on parte de $z = 0$ avec la valeur initiale $u = 0$. Cette fonction est monodrome tant que l'on reste dans une portion du plan ne comprenant pas le point A qui correspond à $z = -1$. Mais si l'on tourne autour de ce point, la fonction éprouve à chaque tour un accroissement égal à

(*) *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, tome XV, page 365.

$2\pi i$; elle est donc susceptible de prendre en chaque point du plan une infinité de valeurs.

6. Lorsqu'une fonction u d'une variable imaginaire z est continue, à un accroissement infiniment petit de la variable correspond un accroissement infiniment petit de la fonction, et la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable est la dérivée de la fonction. On a donc

$$\frac{du}{dz}=\frac{dX+i\,dY}{dx+i\,dy}=\frac{\frac{dX}{dx}dx+\frac{dX}{dy}dy+\left(\frac{dY}{dx}dx+\frac{dY}{dy}dy\right)i}{dx+i\,dy},$$

ou

$$\frac{du}{dz}=\frac{\frac{dX}{dx}+i\frac{dY}{dx}+\left(\frac{dX}{dy}+i\frac{dY}{dy}\right)\frac{dy}{dx}}{1+i\frac{dy}{dx}}.$$

En général la dérivée dépend de la quantité $\frac{dy}{dx}$, et par conséquent de la direction du déplacement infiniment petit donné au point z. A chaque direction de déplacement correspond une dérivée particulière, et la fonction a ainsi, pour une même valeur de z, une infinité de dérivées.

Lorsque la valeur de la dérivée est indépendante de la direction du déplacement, en d'autres termes lorsque la fonction admet une dérivée unique en chaque point, M. Cauchy dit que la fonction est *monogène*.

Pour qu'une fonction soit monogène, il est nécessaire que le rapport arbitraire $\frac{dy}{dx}$ disparaisse de l'expression de la dérivée, ce qui exige que l'on ait

$$\frac{\frac{dX}{dx}+i\frac{dY}{dx}}{1}=\frac{\frac{dX}{dy}+i\frac{dY}{dy}}{i}.$$

Les fonctions X et Y étant réelles, cette équation se décompose

en deux :

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dX}{dx} = \dfrac{dY}{dy}, \\ \dfrac{dX}{dy} = -\dfrac{dY}{dx}. \end{cases}$$

7. Ces conditions analytiques ont une signification géométrique très-remarquable. Considérons les deux surfaces ayant pour ordonnées verticales X et Y, les relations (1) indiquent que si l'on fait tourner d'un angle droit, et de l'axe des x vers l'axe des y, la surface X autour d'une verticale quelconque, le plan tangent à cette surface au point situé sur cette verticale devient parallèle au plan tangent à la surface Y au point correspondant. En effet, les normales aux deux surfaces X et Y font avec les trois axes des coordonnées des angles dont les cosinus sont proportionnels respectivement à

$$\frac{dX}{dx}, \quad \frac{dX}{dy}, \quad -1,$$

$$\frac{dY}{dx}, \quad \frac{dY}{dy}, \quad -1.$$

La rotation indiquée amène l'axe des x dans la direction de l'axe des y, et la direction de l'axe des y dans la direction inverse de l'axe des x; après cette rotation, la normale à la surface X fait donc avec les axes primitifs des angles dont les cosinus sont proportionnels respectivement à

$$-\frac{dX}{dy}, \quad \frac{dX}{dx}, \quad -1,$$

ou, en vertu des relations (1), aux quantités

$$\frac{dY}{dx}, \quad \frac{dY}{dy}, \quad -1;$$

donc elle est parallèle à la normale à la surface Y.

On voit aussi que si par une verticale on mène deux plans rectangulaires quelconques, les tangentes aux sections déterminées par ces deux plans dans les deux surfaces font des angles égaux avec la verticale.

Remarquons encore que, pour que la fonction u soit monogène, aucune des deux fonctions réelles X et Y, qui la composent, ne peut être arbitraire; car, en vertu des relations (1), chacune des fonctions doit satisfaire à l'équation aux différences partielles du second ordre

$$\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{d^2X}{dy^2}=0.$$

Les deux surfaces X et Y ne sont convexes en aucune de leurs parties; car leurs indicatrices aux points correspondants se projettent sur le plan horizontal suivant des hyperboles équilatères égales, dont chacune a pour axes les asymptotes de l'autre.

8. Les conditions (1) pour qu'une fonction soit monogène sont susceptibles d'une autre interprétation géométrique qui a été remarquée par M. Cauchy. Si l'on représente la fonction u, comme la variable z, par le mouvement d'un point dans le plan horizontal, quand le point z se déplace dans diverses directions, le point u se déplace également suivant des directions différentes; si la fonction est monogène, les courbes décrites par le point u font entre elles les mêmes angles que les courbes correspondantes décrites par le point z. En effet, soient ds et dS deux éléments correspondants décrits par les points z et u, on a

$$\begin{aligned}(dS)^2 &= (dX)^2+(dY)^2\\ &=\left(\frac{dX}{dx}dx+\frac{dX}{dy}dy\right)^2+\left(\frac{dY}{dx}dx+\frac{dY}{dy}dy\right)^2,\end{aligned}$$

et si les conditions (1) sont remplies,

$$dS^2=\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^2+\left(\frac{dX}{dy}\right)^2\right]ds^2.$$

En posant, pour abréger,

$$\lambda^2=\left(\frac{dX}{dx}\right)^2+\left(\frac{dX}{dy}\right)^2,$$

on en déduit

$$dS=\lambda\, ds.$$

Considérons maintenant deux triangles infiniment petits formés par des éléments corespondants, les côtés étant proportionnels, les angles sont égaux.

Pour montrer une application de ce théorème, considérons la fonction

$$u = \cos z;$$

les fonctions réelles

$$X = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x, \quad Y = -\frac{e^y - e^{-y}}{2} \sin x,$$

satisfont aux conditions (1), puisque la fonction u est monogène. Supposons que le point z se meuve parallèlement à l'axe des x, et ensuite parallèlement à l'axe des y, le point u décrira deux séries de lignes orthogonales; ces lignes ont pour équations

$$\frac{X^2}{\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2} = 1,$$

$$\frac{X^2}{\cos^2 x} - \frac{Y^2}{\sin^2 x} = 1:$$

ce sont des ellipses et des hyperboles homofocales.

9. La fonction très-simple

$$u = x^2 + y^2 + 2xy\,i$$

est monodrome dans toute l'étendue du plan; mais elle n'est pas monogène, car les fonctions réelles

$$X = x^2 + y^2, \quad Y = 2xy,$$

ne satisfont pas aux conditions (1), excepté au point $z = 0$. Une fonction u, définie par l'équation algébrique

$$f(z, u) = 0,$$

est au contraire monogène sans être monodrome. La dérivée, pour chaque groupe de valeurs de z et u, est donnée par

l'équation

$$\frac{du}{dz} = -\frac{\frac{dF}{dz}}{\frac{dF}{du}}.$$

Cette dérivée a une valeur unique et finie, excepté pour les couples de valeurs qui annulent $\frac{dF}{du}$; alors la dérivée devient infinie ou admet un nombre limité de valeurs.

10. M. Cauchy appelle *fonction synectique* une fonction qui reste finie, continue, monodrome et monogène dans toute l'étendue du plan. Par exemple, une fonction entière est une fonction synectique.

Nous dirons qu'une fonction est *synectique* dans une certaine portion du plan, lorsqu'elle est finie, continue, monodrome et monogène dans cette portion du plan.

CHAPITRE II

PROPRIÉTÉS DES SÉRIES ORDONNÉES SUIVANT LES PUISSANCES ENTIÈRES ET CROISSANTES DE LA VARIABLE.

11. Lemme. — *Lorsqu'on multiplie les termes d'une série convergente ayant tous ses termes positifs, respectivement par des nombres quelconques, mais qui n'augmentent pas à l'infini, on obtient une nouvelle série convergente.*

Soit

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$$

une série convergente ayant tous ses termes positifs; si l'on multiplie les termes de cette série par les nombres

$$b_0, \quad b_1, \quad b_2, \ldots,$$

qui n'augmentent pas à l'infini, on obtient une nouvelle série convergente

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots.$$

En effet, prenons m termes à partir du terme de rang n, la somme

$$a_n b_n + a_{n+1} b_{n+1} \dots + a_{n+m-1} b_{n+m-1}$$

égale évidemment la somme

$$a_n + a_{n+1} \dots + a_{n+m-1},$$

multipliée par une moyenne entre les quantités

$$b_n, \quad b_{n+1}, \dots, \quad b_{n+m-1}.$$

La série proposée étant convergente, la dernière somme a pour limite zéro, si grand que soit m, quand on fait augmenter n indéfiniment. D'autre part, les nombres par lesquels on multiplie, et par conséquent leur moyenne, conservent des valeurs finies; donc la première somme a aussi pour limite zéro, et la seconde série est convergente.

12. Théorème I. — *Étant donnée une série ordonnée suivant les puissances entières et croissantes d'une variable imaginaire, si, pour une valeur de la variable dont le module est* R, *les modules des termes de la série n'augmentent pas à l'infini, la série sera convergente pour toutes les valeurs de la variable dont le module est plus petit que* R.

Soit

$$u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots$$

la série proposée, dans laquelle z désigne la variable imaginaire, u_0, u_1,... des coefficients réels ou imaginaires. Appelons a_0, a_1,... les modules des coefficients. Nous supposons que les modules

$$a_0, \quad a_1 R, \quad a_2 R^2, \dots,$$

des différents termes de la série, pour une valeur de z dont le module est R, n'augmentent pas à l'infini. Donnons à la variable une valeur dont le module ρ soit plus petit que R, et considérons la série convergente

$$1 + \frac{\rho}{R} + \frac{\rho^2}{R^2} + \dots;$$

si nous multiplions les termes de cette série respectivement par les nombres

$$a_0, \quad a_1 R_1, \quad a_2 R^2, \ldots,$$

qui conservent des valeurs finies, nous obtiendrons, en vertu du lemme précédent, une nouvelle série convergente

$$a_0 + a_1 \rho + a_2 \rho^2 + \ldots .$$

Ainsi, pour toute valeur de z ayant un module plus petit que R, la série des modules est convergente, et par conséquent la série proposée elle-même (*).

13. *Scolie.* — Soit R le plus grand module de z, pour lequel les modules des termes de la série n'augmentent pas à l'infini; de l'origine comme centre, avec un rayon égal à R, décrivons un cercle. D'après le théorème précédent, la série est convergente pour toutes les valeurs de z situées dans l'intérieur de ce cercle, que nous appellerons pour cette raison *cercle de convergence.* Elle est divergente pour tous les points extérieurs; car si l'on donne à z une valeur ayant un module plus grand que R, les modules des termes augmentent à l'infini. Sur la circonférence même la série peut être convergente en certains points, infinie ou indéterminée en d'autres.

Il importe de bien comprendre l'existence du cercle de convergence. Que l'on imagine des valeurs croissantes du module pour lesquelles les modules des termes conservent des valeurs finies. Ou ces valeurs croissantes tendent vers une limite finie et déterminée R, ou elles augmentent à l'infini. Dans le premier cas, la limite R est le rayon du cercle de convergence; dans le second cas, la série est convergente dans toute l'étendue du plan.

Remarquons qu'en chacun des points intérieurs au cercle, non-seulement la série proposée est convergente, mais encore la série des modules de ses différents termes.

(*) Ce théorème a été démontré d'une autre manière par M. Cauchy dans ses nouveaux *Exercices*, tome III, page 388.

14. Appliquons à quelques exemples.

La série

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots$$

est convergente dans toute l'étendue du plan.

La série

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots$$

est convergente dans le cercle de rayon 1. La série est encore convergente sur la circonférence limite, excepté au point qui correspond à l'argument zéro; en ce point la somme est infinie.

Il peut arriver que, le point z s'éloignant du centre jusqu'à la circonférence, la somme de la série tende vers une valeur finie, et que cependant en ce point extrême la série soit indéterminée. Considérons, par exemple, la série

$$1 + z + z^2 + \ldots$$

convergente dans le cercle de rayon 1. Posons

$$z = \rho e^{\theta i},$$

et, laissant l'argument constant, faisons croître le module ρ jusqu'à l'unité. La somme de la série tend vers une valeur finie et déterminée $\frac{1}{1 - e^{\theta i}}$, excepté quand $\theta = 0$, et cependant pour $z = e^{\theta i}$ la série a une somme indéterminée.

Lorque le rayon du cercle de convergence se réduit à zéro, la série n'est convergente pour aucune valeur de la variable, excepté pour $z = 0$; il en est ainsi de la série

$$1 + 1.z + 1.2z^2 + 1.2.3z^3 + \ldots.$$

15. Théorème II. — *Une série ordonnée suivant les puissances entières et croissantes de la variable, est une fonction continue dans l'intérieur du cercle de convergence.*

Désignons par $f(z)$ la somme de la série

$$u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots,$$

que nous supposons convergente dans l'intérieur du cercle R. Appelons $\varphi(z)$ la somme des n premiers termes de la série, et $\psi(z)$ le reste; nous aurons

$$f(z) = \varphi(z) + \psi(z).$$

De l'origine comme centre, avec un rayon R' un peu plus petit que R, décrivons un cercle. On peut assigner une valeur de n telle, que, pour cette valeur et pour toutes les valeurs plus grandes, le module du reste $\psi(z)$ soit constamment plus petit qu'une quantité très-petite donnée α, dans l'intérieur du cercle R'. Il suffit, pour cela, de prendre n tel, que l'on ait

$$a^n R'^n + a^{n+1} R'^{n+1} + \ldots < \alpha;$$

ce qui est possible, puisque la série

$$a_0 + a_1 R' + \ldots$$

est convergente. Pour tout module ρ plus petit que R', on aura, à plus forte raison,

$$a_n \rho^n + a^{n+1} \rho^{n+1} + \ldots < \alpha.$$

Le module du reste $\psi(z)$ étant plus petit que cette somme, sera lui-même moindre que α.

Supposons maintenant que nous donnions à la variable deux valeurs voisines z et z' comprises dans l'intérieur du cercle R', la fonction prendra les deux valeurs

$$f(z) = \varphi(z) + \psi(z), \quad f(z') = \varphi(z') + \psi(z'),$$

dont la différence est

$$f(z') - f(z) = \varphi(z') - \varphi(z) + \psi(z') - \psi(z).$$

Le polynôme entier $\varphi(z)$ étant une fonction continue de la variable z, nous pouvons prendre la différence $z' - z$ assez petite pour que la variation $\varphi(z') - \varphi(z)$ du polynôme ait un module plus petit que α. Mais les modules des restes $\psi(z')$ et $\psi(z)$ sont déjà plus petits que α; donc la variation $f(z') - f(z)$ aura un module plus petit que 3α. Cette variation pourra

donc être rendue plus petite qu'une quantité donnée, si petite qu'elle soit. Ainsi la fonction, définie par la série, varie d'une manière continue dans l'intérieur du cercle de convergence. Il est évident, d'ailleurs, que cette fonction est monodrome dans le même cercle, puisqu'elle n'a qu'une valeur pour chaque valeur de z.

16. Théorème III. — *Une série ordonnée suivant les puissances entières et croissantes de la variable est une fonction monogène dans l'intérieur du cercle de convergence.*

Soit la série

$$f(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots$$

convergente dans le cercle de rayon R. Nous allons démontrer d'abord que la série

$$u_1 + 2u_2 z + 3u_3 z^2 + \ldots,$$

obtenue en prenant la dérivée de chacun des termes, est convergente dans le même cercle. De l'origine comme centre, avec un rayon R′ un peu plus petit que R, décrivons un cercle, et donnons à z une valeur dont le module ρ soit plus petit que R′. Si l'on multiplie les termes de la série convergente

$$1 + 2\frac{\rho}{R'} + 3\frac{\rho^2}{R'^2} + \ldots,$$

respectivement par les nombres

$$a_1, \quad a_2 R', \quad a_3 R'^2, \ldots$$

qui n'augmentent pas à l'infini, on obtient une série convergente

$$a_1 + 2a_2\rho + 3a_3\rho^2 + \ldots.$$

Ainsi, la nouvelle série est convergente dans le même cercle que la première.

La série proposée étant représentée par $f(z)$, nous représenterons par $f'(z)$ la série obtenue en prenant la dérivée de chacun des termes de la première, par $f''(z)$ la série obtenue en prenant la dérivée de chacun des termes de la seconde, et

ainsi de suite. Toutes ces séries sont convergentes dans le cercle de convergence R de la série proposée.

Nous allons démontrer, maintenant, que la série $f'(z)$ est la dérivée de la fonction $f(z)$.

Si l'on donne à la variable z un accroissement h, on a

$$(1) \qquad f(z+h) = u_0 + u_1(z+h) + u_2(z+h)^2 + \ldots .$$

Appelons ρ le module de z, k celui de h ; la série

$$(2) \qquad a_0 + a_1(\rho+k) + a_2(\rho+k)^2 + \ldots$$

est convergente, tant que $\rho+k$ est plus petit que R, ou k plus petit que $R-\rho$. Développons les binômes et ordonnons par rapport aux puissances de k, de manière à disposer les termes dans l'ordre suivant :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \qquad (a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots) \\ + (a_1 + 2a_2\rho + 3a_3\rho^2 \ldots)\dfrac{k}{1} + (\ldots)\dfrac{k^2}{1.2} + \ldots . \end{array} \right.$$

Les termes partiels de la série (2) étant tous positifs et ayant une somme finie, la série (3), qui se compose des mêmes quantités mises dans un autre ordre, est aussi convergente, et offre une somme égale. On observe, en effet, que la somme des n premiers termes de la série (3) contient les n premiers termes de la série (2), plus d'autres termes qui appartiennent aux termes suivants de la série (2), et qui, par conséquent, ont une somme infiniment petite pour les très-grandes valeurs de n; ces sommes des n premiers termes des deux séries, ayant une différence infiniment petite, tendent vers la même limite.

En développant de même la série (1), et ordonnant suivant les puissances croissantes de h, nous formons la série

$$(4) \qquad f(z) + f'(z)\frac{h}{1} + f''(z)\frac{h^2}{1.2} + \ldots,$$

qui est aussi convergente, et qui a même somme que la série (1); car la différence entre la somme des n premiers termes de la série (4) et la somme de n premiers termes de la série (1), ayant un module plus petit que la différence des deux sommes

correspondantes dans les séries (2) et (3), a pour limite zéro.

On a donc

$$f(z+h) = f(z) + f'(z)\frac{h}{1} + f''(z)\frac{h^2}{1.2} + \ldots;$$

on en déduit

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z) + f''(z)\frac{h}{1.2} + \ldots.$$

La série convergente, écrite dans le second membre, est une fonction continue de la variable h. Si h est très-petit, elle diffère infiniment peu de $f'(z)$, et, quand h tend vers zéro, elle a $f'(z)$ pour limite. Donc

$$\lim \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z).$$

Ainsi la série $f(z)$ admet une dérivée unique $f'(z)$, quelle que soit la direction du déplacement h. Cette série est donc une fonction monogène.

17. En résumant ce qui précède, on voit qu'une série ordonnée suivant les puissances croissantes d'une variable est une fonction continue, monodrome et monogène, dans l'intérieur du cercle de convergence. En un mot, c'est une fonction *synectique* dans le cercle de convergence.

Nous citerons comme exemples les séries

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$\frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.$$

$$1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

par lesquelles on définit les trois fonctions

$$e^z, \quad \sin z, \quad \cos z,$$

très-usitées dans l'analyse. Le rayon du cercle de convergence étant infini, ces trois fonctions sont finies, continues, monodromes et monogènes, dans toute l'étendue du plan; ce

ont des fonctions *synectiques* dans toute l'étendue du plan.

18. Une double série

$$\ldots + \frac{u_{-2}}{z^2} + \frac{u_{-1}}{z} + u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots,$$

ordonnée suivant les puissances entières positives et négatives, et se prolongeant à l'infini des deux côtés, peut être considérée comme la réunion de deux séries ordinaires

$$u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots,$$
$$u_{-1} z^{-1} + u_{-2} z^{-2} + \ldots.$$

Soient R le rayon de convergence de la première série, $\frac{1}{R'}$ celui de la seconde quand on prend $\frac{1}{z}$ pour variable. La première série est convergente dans le cercle de rayon R, la seconde pour toute la partie du plan extérieure au cercle de rayon R'. Donc, si R est plus grand que R', la double série sera convergente dans la couronne comprise entre les cercles R' et R, et dans cette étendue elle représentera une fonction synectique.

Par exemple, la double série

$$\ldots + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \ldots$$

est convergente dans la couronne comprise entre les circonférences de rayons 1 et 2.

La double série

$$\ldots + \frac{z^{-2}}{1.2} + \frac{z^{-1}}{1} + 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^{-2}}{1.2} + \ldots$$

est convergente dans toute l'étendue du plan, excepté au point $z = 0$.

CHAPITRE III.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS EN SÉRIES ORDONNÉES SUIVANT LES PUISSANCES CROISSANTES DE LA VARIABLE.

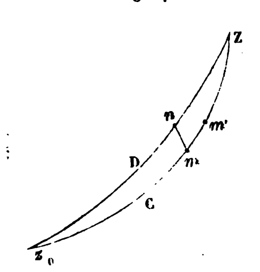
---

19. Soit $f(z)$ une fonction finie, continue, monodrome et monogène, c'est-à-dire une fonction synectique, dans une certaine portion du plan. Considérons les valeurs de l'intégrale définie

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz,$$

quand on va du point z_0 au point Z par deux chemins, z_0CZ et z_0DZ (*fig.* 4), très-rapprochés l'un de l'autre, et situés dans la partie du plan dont il s'agit. A chaque point m de la première courbe faisons correspondre un point n de la seconde courbe, de manière que le point z_0 se corresponde à lui-même ainsi que le point Z; désignons par la lettre d un déplacement infiniment petit sur l'une des courbes, et par la lettre δ le déplacement de m en n. Si l'on va d'un point m de la première courbe à un point voisin m' de la même courbe, la fonction éprouve un accroissement marqué par $df(z)$. La fonction, étant monodrome, prendra au point n la même valeur, quand on suivra le chemin z_0mn au lieu du chemin z_0Dn; il en résulte que la valeur de la fonction au point n dans la seconde intégrale diffère de la valeur de la fonction au point m dans la première intégrale d'une quantité égale à la variation de cette fonction correspondant au déplacement mn, variation marquée par $\delta f(z)$. D'autre part, la fonction étant monogène, c'est-à-dire admettant la même dérivée pour les deux déplacements mm' et mn, on a

Fig. 4.



$$df(z) = f'(z)\,dz, \quad \delta f(z) = f'(z)\,\delta z;$$

d'où l'on déduit

$$(1) \qquad \delta f(z).dz = df(z).\delta z.$$

Cela posé, calculons la variation de l'intégrale définie, quand on remplace le chemin z_0CZ par le chemin infiniment voisin z_0DZ. On a

$$\delta \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = \int_{z_0}^{Z} [\delta f(z).dz + f(z).d\,\delta z];$$

en vertu de la relation (1), cette expression devient

$$\int_{z_0}^{Z} [df(z).\delta z + f(z).d\delta z],$$

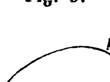
ou, plus simplement,

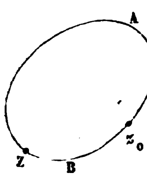
$$\int_{z_0}^{Z} d[f(z)\,\delta z] = [f(z)\,\delta z]_{z_0}^{Z}.$$

Les deux points extrêmes étant fixes, δz_0 est nulle, ainsi que δZ; donc la variation de l'intégrale définie est nulle.

20. Considérons maintenant deux lignes quelconques allant d'un point à un autre et comprenant entre elles une portion finie du plan dans laquelle la fonction $f(z)$ reste finie, continue, monodrome et monogène, il est clair que ces lignes conduiront à la même valeur de l'intégrale définie; car on peut passer de l'une de ces lignes à l'autre par une série de transformations qui n'altèrent pas la valeur de l'intégrale définie. Il en résulte que, si la fonction $f(z)$ est synectique dans la portion du plan comprise dans une courbe fermée, l'intégrale définie, obtenue en parcourant ce contour, est nulle. En effet, l'intégrale le long de z_0AZ (*fig.* 5) est la même que suivant z_0BZ; or, quand le point Z vient en z_0, cette dernière intégrale est évidemment nulle.

Fig. 5.

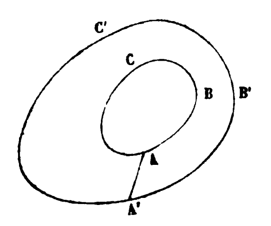




De même, si la fonction $f(z)$ est synectique dans la portion du plan comprise entre les deux courbes fermées ABC, A′B′C′ (*fig.* 6), les intégrales correspondantes à ces deux contours

sont égales. En effet, le chemin A′B′C′A′ peut être remplacé par le chemin A′ABCAA′; mais les portions d'intégrale obtenues en parcourant la ligne A′A, d'abord de A′ en A, puis, à la fin, en sens contraire, sont évidemment égales et de signes contraires; donc les deux contours ABCA, A′B′C′A′, donnent la même intégrale définie.

Fig. 6.



Ces théorèmes remarquables sont dus à M. Cauchy (*); nous en avons reproduit la démonstration, afin de bien préciser les hypothèses sur lesquelles elle repose.

21. Lorsque la fonction $f(z)$ est synectique dans une certaine portion du plan, l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz,$$

calculée à partir d'un point z_0 et prise le long d'une courbe quelconque tracée dans cette partie du plan, est aussi une fonction synectique dans la même étendue. On voit d'abord que la fonction est monodrome, puisque tous les chemins, qui vont du point z_0 au point z, conduisent à la même valeur. Il est facile de démontrer qu'elle est aussi monogène. Désignons par $F(z)$ cette fonction nouvelle; si nous donnons à la variable z un accroissement h, la fonction éprouve l'accroissement

$$F(z+h) - F(z) = \int_{z}^{z+h} f(z)\,dz = [f(z) + \varepsilon]h,$$

la quantité ε s'annulant avec h. On en déduit

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z) + \varepsilon,$$

$$\lim \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z).$$

(*) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*; 1846.

Ainsi la fonction F (z) a une dérivée unique $f(z)$, quelle que soit la direction du déplacement; c'est donc une fonction monogène.

22. Le développement en série n'offre plus aucune difficulté.

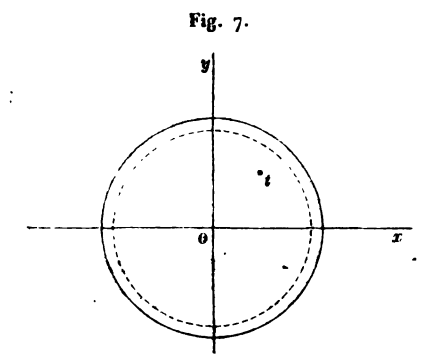


Fig. 7.

Soit $f(z)$ une fonction finie, continue, monodrome et monogène, dans l'intérieur d'un cercle décrit de l'origine comme centre avec un rayon R (*fig.* 7); je dis qu'elle est développable en série ordonnée suivant les puissances de z et convergente dans le cercle de rayon R. Soit t un point fixe pris à volonté dans l'intérieur du cercle, la fonction

$$\frac{f(z)-f(t)}{z-t}$$

dans laquelle nous regardons z comme la variable, jouit des mêmes propriétés que la fonction $f(z)$ dans l'intérieur du cercle R; elle est évidemment finie, continue, monodrome et monogène, comme la fonction $f(z)$. On pourrait craindre cependant qu'elle ne devînt infinie pour la valeur particulière $z=t$ qui annule le dénominateur; pour éviter cet inconvénient, nous supposerons d'abord qu'au point t la dérivée $f'(z)$ de la fonction proposée a une valeur finie; si l'on donne à z une valeur voisine de t, la fonction

$$\frac{f(z)-f(t)}{z-t},$$

différant très-peu de la quantité finie $f'(t)$, aura elle-même une valeur finie et sera continue. Ainsi la fonction

$$\frac{f(z)-f(t)}{z-t}$$

est finie et continue en tous les points situés à l'intérieur du cercle sans exception.

Du point O comme centre, avec un rayon r plus grand que Ot, mais plus petit que R, décrivons un second cercle. Il résulte du théorème précédent que l'intégrale définie

$$\int \frac{f(z) - f(t)}{z - t}\, dz,$$

obtenue en parcourant la circonférence r, est nulle; on en déduit

$$\int \frac{f(t)\, dz}{z - t} = \int \frac{f(z)\, dz}{z - t},$$

les intégrales étant prises le long de la même circonférence; et si l'on fait sortir du signe $\int$ le facteur constant $f(t)$,

$$f(t) \int \frac{dz}{z - t} = \int \frac{f(z)}{z - t}\, dz.$$

La fonction $\frac{1}{z - t}$ ne devenant infinie que pour la valeur $z = t$, on peut dans l'évaluation de l'intégrale

$$\int \frac{dz}{z - t}$$

remplacer la circonférence r par une circonférence décrite du point t comme centre avec un rayon infiniment petit ρ. Posons

$$z - t = \rho e^{\theta i};$$

le rayon ρ étant constant et l'angle θ seul variable, on a

$$dz = i \rho e^{\theta i}\, d\theta,$$

d'où

$$\frac{dz}{z - t} = i\, d\theta;$$

l'intégrale devient

$$i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$$

On a donc

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{z - t}\, dz,$$

cette dernière intégrale étant prise sur la circonférence r, et en tournant de Ox vers Oy. Mais quand le point z parcourt la circonférence r, le module de z reste constamment plus grand que le module de t; on peut donc développer la fraction

$$\frac{1}{z-t}$$

en une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de t, ce qui donne

$$\frac{1}{z-t}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{t}{z}+\frac{t^2}{z^2}+\ldots\right);$$

donc

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\left[\int\frac{f(z)}{z}dz+t\int\frac{f(z)}{z^2}dz+t^2\int\frac{f(z)}{z^3}dz+\ldots\right].$$

Chacune des intégrales définies qui entrent dans le second membre, étant prise le long d'un contour fini r, a une valeur finie et déterminée, et la fonction $f(t)$ se trouve ainsi développée en une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de t. En appelant u_0, u_1, u_2,... les coefficients de la série, on a

(1) $$f(t)=u_0+u_1t+u_2t^2+\ldots.$$

Si l'on pose

$$z=re^{\theta i},$$

un coefficient quelconque est donné par la formule

$$u_n=\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}f(re^{\theta i})e^{-n\theta i}d\theta,$$

dans laquelle r désigne un rayon arbitraire plus petit que le rayon R du cercle de convergence.

23. Le point t est un point quelconque intérieur au cercle de rayon R; ainsi la série représente la fonction proposée $f(t)$ en tous les points du cercle, excepté toutefois les points où la dérivée $f'(t)$ serait infinie ou discontinue : mais cette restric-

tion est inutile. En effet, nous avons démontré (n° 15) qu'une série, ordonnée comme la série (1), est une fonction continue de la variable t, dans le cercle de convergence, sans exception; la fonction $f(t)$ et la série, étant continues dans toute l'étendue du cercle, et égales en tous les points, excepté en certains points particuliers, ne peuvent différer même en ces points. Donc le développement s'applique à tous les points du cercle sans exception.

La fonction $f(t)$ et la série étant égales, leurs dérivées sont égales, et l'on a

$$f'(t) = u_1 + 2u_2 t + 3u_3 t^2 + \dots$$

pour tous les points du cercle de convergence (n° 16).

On voit par là que la dérivée $f'(t)$ de la fonction proposée reste finie et continue dans le cercle, et que, par conséquent, il est impossible qu'elle devienne infinie ou discontinue en aucun de ses points. Ainsi la circonstance que nous avons écartée dans la démonstration ne peut pas se présenter.

De ce qui précède résulte le beau théorème de M. Cauchy, que nous énoncerons de la manière suivante :

24. Théorème. — *Pour qu'une fonction soit développable en une série ordonnée suivant les puissances entières, positives et croissantes de la variable, et convergente dans un cercle décrit de l'origine comme centre, il est nécessaire et il suffit que la fonction soit synectique, c'est-à-dire soit finie, continue, monodrome et monogène, dans ce même cercle.*

Ces conditions sont nécessaires, car nous avons démontré (n° 17) qu'une série, ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable, est une fonction synectique dans le cercle de convergence. Elles sont suffisantes; car nous venons de démontrer que, lorsqu'une fonction est synectique dans un cercle de rayon R, elle est développable en une série ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable et convergente dans le même cercle. Il est d'ailleurs impossible de les réduire à un moindre nombre; les explications que nous avons don-

nées au commencement de ce Mémoire font voir, en effet, qu'une fonction peut être finie et continue sans être monodrome, monodrome sans être monogène, ou monogène sans être monodrome.

25. Une fois établie la possibilité du développement, il est facile de déterminer les coefficients. Reprenons, en effet, la série (1), dans laquelle nous remplaçons t par z,

$$(2)\qquad f(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + u_3 z^3 + \ldots.$$

La fonction et la série étant égales dans le cercle R, leurs dérivées des différents ordres sont égales dans le même cercle.

On a donc

$$f'(z) = u_1 + 2u_2 z = 3u_3 z^2 + \ldots,$$
$$f''(z) = 1.2u_2 + 2.3u_3 z + \ldots,$$
$$f'''(z) = 1.2.3u_3 + 2.3.4u_4 z + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces diverses séries sont toutes convergentes dans le cercle R et continues ; si l'on y fait $z = 0$, on a

$$u_0 = f(0),\quad u_1 = f'(0),\quad 1.2u_2 = f''(0),\quad 1.2.3u_3 = f'''(0),\ldots,$$

et l'on obtient ainsi la série de Maclaurin,

$$(3)\qquad f(z) = f(0) + f'(0)\frac{z}{1} + f''(0)\frac{z^2}{1.2} + \ldots.$$

Nous avons exprimé les coefficients de la série de deux manières, par des intégrales définies et au moyen des dérivées de la fonction. La comparaison des deux développements donne la formule

$$(4)\qquad f^n(0) = \frac{1.2.3\ldots n}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{\theta i})\,e^{-n\theta i}\,d\theta.$$

La série de Taylor s'en déduit aisément :

Si la fonction $f(z)$ est synectique dans un cercle décrit autour du point z_0 comme centre, elle se développe en une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $z - z_0$

et convergente dans le même cercle, et l'on a

$$(5)\quad f(z) = f(z_0) + f'(z_0)\frac{z - z_0}{1} + f''(z_0)\frac{(z - z_0)^2}{1.2} + \ldots$$

En remplaçant z_0 par z et $z - z_0$ par h, on obtient la série de Taylor sous sa forme habituelle

$$(6)\qquad f(z+h) = f(z) + f'(z)\frac{h}{1} + f''(z)\frac{h^2}{1.2} + \ldots,$$

et la formule (4) devient

$$(7)\qquad f^n(z) = \frac{1.2\ldots n}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(z + re^{\theta i})\, e^{-n\theta i}\, d\theta,$$

r étant un rayon arbitraire plus petit que le rayon du cercle de convergence relatif au point z.

Application à quelques exemples.

26. Soit une fraction rationnelle

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\chi(z)}.$$

Marquons les points A, B, C, ... qui annulent le dénominateur, et qui, par conséquent, rendent la fonction infinie. Soit A celui de ces points qui est le plus rapproché de l'origine; du point O comme centre, avec un rayon égal à OA, décrivons un cercle; la fraction rationnelle sera développable, dans ce cercle, en une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de z. Dès que l'on sort du cercle, la série est divergente, car la fonction devient infinie au point A.

De même, si d'un point z_0, pris arbitrairement dans le plan, avec un rayon égal à la distance de ce point à celui des points A, B, C, ... qui en est le plus rapproché, on décrit un cercle, la fonction sera développable, dans ce cercle, en une série convergente, ordonnée suivant les puissances croissantes de $z - z_0$.

27. La fonction

$$e^{\sin z}$$

étant finie, continue, monodrome et monogène, dans toute l'étendue du plan, est développable en une série ordonnée suivant les puissances de z, et convergente dans toute l'étendue du plan.

La fonction

$$\frac{1}{e^{z-1}}$$

est discontinue ou indéterminée pour $z = 1$; car elle devient infinie, ou nulle, ou indéterminée au point $z = 1$, suivant le chemin qu'on suit pour y arriver; elle est donc développable dans le cercle de rayon 1. Il en est de même de la fonction

$$\sin\left(\frac{1}{z-1}\right),$$

qui devient indéterminée au point $z = 1$.

28. Soit la fonction irrationnelle

$$\sqrt{1+z},$$

comptée à partir de $z = 0$, avec la valeur initiale $+1$. Nous avons vu (n° 3) que cette fonction cesse d'être monodrome quand on tourne autour du point $z = -1$; elle sera donc développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de z, dans le cercle décrit de l'origine comme centre, avec un rayon égal à l'unité. Il en sera de même d'une fonction implicite u définie par une équation algébrique entre u et z et comptée à partir du point z avec la valeur initiale u_0 (n° 4). Si du point z_0 comme centre, avec un rayon égal à la distance au point le plus proche pour lequel l'équation a des racines égales et la fonction cesse d'être monodrome, on décrit un cercle, la fonction sera développable dans ce cercle en une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de $z - z_0$.

La fonction transcendante

$$\log(1+z),$$

comptée à partir de $z=0$, avec la valeur initiale zéro (n° 5), devient infinie, et cesse d'être monodrome, au point $z=-1$; elle sera donc développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de z, dans le cercle décrit de l'origine comme centre, avec un rayon égal à l'unité.

La fonction

$$u=x^2+y^2+2xyi,$$

n'étant pas monogène, n'est pas développable.

29. Considérons enfin la fonction

$$u=\sin z+\lambda\,(x^2+y^2-1),$$

dans laquelle la lettre λ représente la valeur de l'intégrale définie

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\cos\left(\frac{t}{x^2+y^2}\right)dt,$$

obtenue en donnant à t des valeurs réelles de 0 à ∞.

On sait que l'intégrale définie

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\cos gt\,dt$$

est constamment égale à l'unité quand le nombre g est moindre que 1, et qu'elle est constamment nulle quand le nombre g est plus grand que 1. De l'origine comme centre, avec un rayon égal à l'unité, décrivons un cercle; le facteur λ sera nul tant que le point z restera dans le cercle, et il deviendra égal à l'unité pour tous les points extérieurs. La fonction est finie, continue et monodrome, dans toute l'étendue du plan; elle est monogène dans le cercle de rayon 1, puisque la seconde partie se réduit à zéro dans l'intérieur du cercle; mais, hors du cercle, elle n'est plus monogène, parce que la seconde partie x^2+y^2-1 n'est pas monogène. On en conclut que la fonction

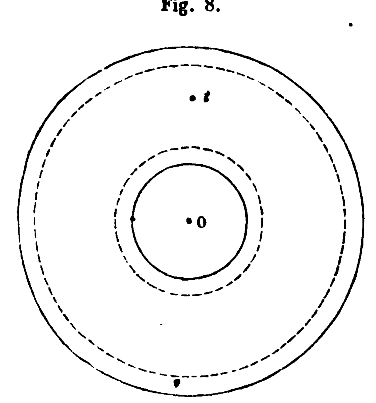
est développable en série convergente dans le cercle de rayon égal à l'unité.

Les exemples précédents montrent que la limite de convergence de la série est déterminée, tantôt parce que la fonction devient infinie ou discontinue, tantôt parce qu'elle cesse d'être monodrome, tantôt parce qu'elle cesse d'être monogène.

30. Théorème II. — *Lorsqu'une fonction est synectique dans la portion du plan comprise entre deux cercles ayant pour centre l'origine des coordonnées, elle est développable en une double série ordonnée suivant les puissances entières, positives et négatives, de la variable, et convergente dans cette portion du plan.*

Nous supposons la fonction $f(z)$ synectique dans la portion du plan comprise entre les deux circonférences R et R′ décrites de l'origine comme centre, R étant plus grand que R′.

Fig. 8.



Soit t un point quelconque de cette couronne (*fig.* 8); du point O comme centre décrivons deux cercles, l'un avec un rayon r plus petit que R, mais plus grand que Ot, l'autre avec un rayon r' plus petit que Ot, mais plus grand que R′. L'intégrale

$$\int \frac{f(z)-f(t)}{z-t}\,dz,$$

obtenue en parcourant chacune des deux circonférences dans le même sens, a la même valeur. En distinguant par les indices r et r' ces deux intégrales définies, on a

$$\int_r \frac{f(z)-f(t)}{z-t}\,dz = \int_{r'} \frac{f(z)-f(t)}{z-t}\,dz$$

ou

$$\int_r \frac{f(z)}{z-t}dz - f(t)\int_r \frac{dz}{z-t} = \int_{r'} \frac{f(z)}{z-t}dz - f(t)\int_{r'} \frac{dz}{z-t}.$$

Mais $\int_{r'} \frac{dz}{z-t} = 0$; car la circonférence r' ne comprend pas le point $z = t$ qui rend infinie la fonction placée sous le signe $\int$. On sait d'ailleurs que

$$\int_r \frac{dz}{z-t} = 2\pi i.$$

Il en résulte

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_r \frac{f(z)}{z-t}dz + \int_{r'} \frac{f(z)}{t-z}dz\right].$$

Dans la première intégrale, le module de z étant plus grand que celui de t, la quantité $\frac{1}{z-t}$ peut être développée en une série convergente suivant les puissances positives croissantes de $\frac{t}{z}$. Dans la seconde, au contraire, le module de z étant plus petit que celui de t, la quantité $\frac{1}{t-z}$ se développera en une série convergente suivant les puissances croissantes de $\frac{z}{t}$.

On aura donc

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\begin{array}{l} \int_r \frac{f(z)}{z}dz + t\int_r \frac{f(z)}{z^2}dz + t^2\int_r \frac{f(z)\,dz}{z^3} + \ldots \\ \qquad + t^{-1}\int_{r'} f(z)\,dz + t^{-2}\int_{r'} f(z)\,z\,dz \ldots \end{array}\right\}.$$

Les intégrales définies, qui servent de coefficients à la double série, ont des valeurs finies et déterminées. On peut les prendre le long d'une circonférence arbitraire comprise entre les circonférences R et R', et en tournant de droite à gauche. Si l'on pose $z = re^{\theta i}$, et si l'on remplace t par z, on a la double série

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} f(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots \\ \qquad + u_{-1} z^{-1} + u_{-2} z^{-2} + \ldots \end{array}\right.$$

dans laquelle

$$u_n = \frac{r^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{\theta i})e^{-n\theta i}\,d\theta,$$

$$u_n = \frac{r^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{\theta i})e^{n\theta i}\,d\theta.$$

Cette extension du théorème de M. Cauchy a été indiquée par le capitaine Laurent.

31. Il est facile d'étendre les théorèmes précédents aux fonctions de plusieurs variables indépendantes. Soit $f(x, y, z)$ une fonction de trois variables imaginaires x, y, z, finie, continue, monodrome et monogène, quand chacune des variables reste comprise dans une certaine portion du plan. Donnons à x, y, z des accroissements h, k, l; la fonction $f(x+h, y+k, z+l)$ est finie, continue, monodrome et monogène, tant que les variables h, k, l restent comprises respectivement dans des cercles de rayons R, R′, R″, décrits des points x, y, z comme centres.

Posons

$$u = x + th, \quad v = y + tk, \quad w = z + tl,$$

t désignant une variable dont le module est plus petit que l'unité. La fonction $f(u, v, w)$ est une fonction synectique de t, quand la variable t se meut dans le cercle de rayon 1, décrit de l'origine comme centre; elle est donc développable, dans cette étendue, en une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de t, et l'on a, en désignant par $F(t)$ cette fonction,

$$F(t) = F(o) + F'(o)\frac{t}{1} + F''(o)\frac{t^2}{1.2} + \ldots.$$

Mais on a symboliquement

$$F^n(t) = (h D_u f + k D_v f + l D_w f)^n,$$

d'où

$$F^n(o) = (h D_x f + k D_y f + l D_z f)^n.$$

Si l'on remplace $F^n(o)$ par sa valeur et que l'on fasse $t = 1$,

on obtient la série

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &f(x+h, y+k, z+l)=f(x, y, z)\\ &+\sum_1^{\infty} \frac{(h\mathrm{D}_x f + k\mathrm{D}_y f + l\mathrm{D}_z f)^n}{1.2\ldots n}, \end{aligned}\right.$$

ordonnée suivant les puissances croissantes de h, k, l, et convergente dans les cercles de rayons R, R′, R″.

Les coefficients s'expriment aisément au moyen d'intégrales définies. En effet, si dans la formule (7)

$$\mathrm{D}_x^n \varphi(x) = \frac{1.2\ldots n}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} \varphi(x+re^{\theta i})\, e^{-n\theta i}\, d\theta,$$

on fait

$$\varphi(x) = \mathrm{D}_y^{n'} \psi(x, y),$$

on a

$$\mathrm{D}_{xy}^{n+n'} \psi = \frac{1.2\ldots n.1.2\ldots n'}{r^n r'^{n'}} \frac{1}{(2\pi)^2}$$

$$\times \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(x+re^{\theta i}, y+r'e^{\theta' i})\, e^{-n\theta i - n'\theta' i}\, d\theta\, d\theta'.$$

Celle-ci donne pareillement

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{D}_{xyz}^{n+n'+n''} f(x, y, z) = \frac{1.2\ldots n.1.2\ldots n'.1.2\ldots n''}{r^n r'^{n'} r''^{n''}} \frac{1}{(2\pi)^3}\\ &\times \int\!\!\int\!\!\int_0^{2\pi} f(x+re^{\theta i}, y+r'e^{\theta' i}, z+r''e^{\theta'' i})\, e^{-n\theta i - n'\theta' i - n''\theta'' i}\, d\theta\, d\theta' \end{aligned}\right.$$

CHAPITRE IV.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FONCTIONS.

32. Théorème I. — *Lorsqu'une fonction est synectique dans une certaine portion du plan, toutes ses dérivées sont aussi des fonctions synectiques dans la même étendue.*

Soit z_0 un point quelconque pris dans cette portion du plan; nous avons démontré que la fonction proposée $f(z)$ se déve-

loppe en une série convergente

$$f(z) = u_0 + u_1(z - z_0) + u_2(z - z_0)^2 + \ldots$$

dans un cercle décrit du point z_0 comme centre avec un rayon convenable. On en déduit

$$f'(z) = u_1 + 2u_2(z - z_0) + 3u_3(z - z_0)^2 + \ldots.$$

Cette série étant convergente dans le même cercle, la fonction $f'(z)$ est synectique dans ce cercle; et, comme le point z_0 peut être pris arbitrairement dans la portion du plan pour laquelle la fonction $f(z)$ est synectique, la fonction $f'(z)$ jouit de la même propriété dans toute cette étendue.

Le théorème étant démontré pour la première dérivée, s'étend évidemment à toutes les autres.

33. Corollaire I. — *Une fonction synectique ne peut être constante dans une portion finie du plan, si petite qu'elle soit.*

Soit z_0 un point situé dans cette portion du plan; la fonction étant constante dans le voisinage du point z_0, toutes ses dérivées sont nulles en ce point, et la série de Taylor se réduit à

$$f(z) = f(z_0).$$

Il en résulte que la fonction est constante dans le cercle de convergence décrit du point z_0 comme centre. Que l'on répète le même raisonnement pour un autre point du cercle, et l'on démontrera ainsi de proche en proche que la fonction reste constante dans toute l'étendue du plan pour laquelle la fonction est synectique.

Il en serait de même si la fonction était constante le long d'une ligne, si petite qu'elle soit.

Corollaire II. — *Une fonction synectique ne peut avoir toutes ses dérivées nulles en un point.*

Si cela avait lieu, la fonction serait une constante.

34. Théorème II. — *Lorsqu'une fonction synectique dans une certaine portion du plan s'annule pour une valeur $z = a$*

comprise dans cette portion du plan, elle est divisible par $(z-a)^n$, *n désignant un nombre entier fini.*

En développant, d'après la série de Taylor, on a en effet

$$f(z)=f'(a)\frac{z-a}{1}+f''(a)\frac{(z-a)^2}{1.2}+\dots,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{f(z)}{z-a}=f'(a)+f''(a)\frac{z-a}{1.2}+\dots.$$

Le quotient $\frac{f(z)}{z-a}$, étant développé en série convergente dans un cercle décrit du point a comme centre, est une fonction synectique dans le voisinage du point a, et par conséquent dans la même étendue du plan que la fonction proposée. Si l'on représente par $\varphi(z)$ cette fonction, on aura

$$f(z)=(z-a)\,\varphi(z).$$

Si la quantité a n'annule pas $f'(z)$, on dit que a est racine simple de l'équation $f(z)=0$. Mais si a annule la fonction $f(z)$ et ses $(n-1)$ premières dérivées, on a

$$f(z)=(z-a)^n\left[\frac{f^n(a)}{1.2\dots n}+\frac{f^{n+1}(a)}{1.2\dots(n+1)}(z-a)\right]+\dots$$

et le quotient

$$\frac{f(z)}{(z-a)^n}$$

est une fonction synectique dans la même étendue que la fonction $f(z)$. Si l'on représente ce quotient par $\varphi(z)$, on a

$$f(z)=(z-a)^n\,\varphi(z).$$

Dans ce cas, on dit que la racine a est du degré n de multiplicité.

Le nombre des dérivées qui s'annulent pour $z=a$ étant nécessairement fini, toute racine est d'un degré fini et entier de multiplicité.

35. *Scolie.* — Dans une portion finie du plan, l'équation $f(z)=0$ n'admet qu'un nombre fini de racines; car, si

elle en admettait une infinité, les points qui correspondent aux racines seraient infiniment rapprochés les uns des autres et la fonction nulle en ces points infiniment rapprochés, ce qui est impossible.

Si l'on appelle $a, b, c, \ldots, l$ les racines, la fonction $f(z)$ s'écrira

$$f(z) = \left(1 - \frac{z}{a}\right)\left(1 - \frac{z}{b}\right)\left(1 - \frac{z}{c}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{l}\right)\varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant une fonction synectique qui ne s'annule pas dans la portion du plan considérée.

36. Théorème III. — *Quand une fonction $f(z)$, monodrome et monogène, devient infinie pour $z = a$, quel que soit le chemin suivi pour arriver à ce point, on peut la mettre sous la forme*

$$f(z) = \frac{A_0}{(z-a)^n} + \frac{A_1}{(z-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{z-a} + \psi(z),$$

la fonction $\psi(z)$ étant monodrome et monogène et ne devenant pas infinie pour $z = a$.

En effet, dans ce cas, la fonction $\frac{1}{f(z)}$ devenant nulle pour $z = a$, et restant finie et continue, on a

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^n \varphi(z);$$

d'où l'on déduit

$$f(z) = \frac{\frac{1}{\varphi(z)}}{(z-a)^n} = \frac{\chi(z)}{(z-a)^n}.$$

La valeur a est un infini du degré fini et entier n de multiplicité.

Si l'on développe la fonction $\chi(z)$ en série suivant les puissances croissantes de $(z-a)$, la fonction proposée s'écrit

$$f(z) = \frac{A_0}{(z-a)^n} + \frac{A_1}{(z-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{z-a} + \psi(z),$$

$\psi(z)$ désignant une fonction monodrome et monogène qui ne devient plus infinie pour $z = a$.

Pour que la fonction jouisse de ces propriétés, il est nécessaire qu'elle devienne infinie pour $z = a$, quel que soit le chemin suivi pour arriver en ce point. Ceci n'a pas lieu pour la fonction $e^{\frac{1}{z}}$, qui, lorsque $z = 0$, devient nulle, ou infinie, ou indéterminée, suivant le chemin suivi.

37. Théorème IV. — *Une fonction, monodrome et monogène dans toute l'étendue du plan, devient nécessairement infinie pour une valeur finie ou infinie de la variable.*

Appelons M le maximum du module de la fonction $f(z)$ dans le cercle de rayon r décrit autour de l'origine ; si dans la formule (n° 25)

$$f^n(0) = \frac{1.2\ldots n}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{\theta i})\, e^{-n\theta i}\, d\theta,$$

nous remplaçons chaque élément de l'intégrale définie par son module, ou par un module plus grand $\mathrm{M}\,d\theta$, il est évident que le module de l'intégrale définie sera moindre que $\int_0^{2\pi}\mathrm{M}\,d\theta$ ou que $2\pi\mathrm{M}$, et nous aurons

$$\operatorname{mod} f^n(0) < 1.2.3\ldots n\,\frac{\mathrm{M}}{r^n}.$$

Supposons maintenant que la fonction $f(z)$ ne devienne infinie pour aucune valeur finie ou infinie de z, c'est-à-dire que le module de la fonction reste moindre qu'une quantité finie M dans toute l'étendue du plan. Dans ce cas, on pourrait prendre le rayon r infiniment grand, et l'on aurait, en vertu de la formule précédente,

$$f^n(0) = 0.$$

La fonction, ayant toutes ses dérivées nulles, serait une constante. Si donc la fonction n'est pas une constante, elle doit devenir infinie, soit pour une valeur finie, soit pour une valeur infinie, de la variable z.

38. Corollaire I. — *Une fonction, monodrome et monogène dans toute l'étendue du plan, devient nécessairement nulle pour une valeur finie ou infinie de la variable.*

Car si la fonction $f(z)$ ne devenait pas nulle, la fonction $\frac{1}{f(z)}$ ne deviendrait pas infinie ; ce qui est impossible.

Il peut arriver que la même valeur de z rende une fonction à la fois nulle et infinie. Ainsi la fonction $e^{\frac{1}{z}}$ devient infinie quand le point z vient à l'origine par un chemin situé à droite de l'axe des y, et nulle quand le point z vient à l'origine par un chemin situé à gauche de l'axe des y. De même la fonction e^z devient nulle ou infinie pour des valeurs infinies de z.

COROLLAIRE II. — *Une fonction, monodrome et monogène dans toute l'étendue du plan, acquiert toutes les valeurs possibles.*

La fonction $f(z)$ acquiert nécessairement la valeur A, car la fonction $f(z) - A$ prend la valeur zéro.

39. THÉORÈME V. — *Deux fonctions monodromes et monogènes, qui admettent les mêmes zéros et les mêmes infinis, chacun au même degré de multiplicité, sont égales, à un facteur constant près.*

Soient $f(z)$ et $F(z)$ les deux fonctions proposées. Le quotient

$$\frac{F(z)}{f(z)}$$

de ces deux fonctions, ne devenant ni nul, ni infini, est une constante. En désignant par A cette constante, on a

$$F(z) = Af(z).$$

Scolie. — Il résulte de là qu'une fonction est complétement définie, à un facteur constant près, quand on connaît ses zéros et ses infinis. C'est par le nombre et la distribution des zéros et des infinis dans le plan que les fonctions se distinguent les unes des autres.

40. THÉORÈME VI. — *Toute fonction monodrome et monogène, qui ne devient infinie que pour $z = \infty$, sans devenir indéterminée, est une fonction entière.*

Soit $u = f(z)$ la fonction proposée. Posons $z = \frac{1}{t}$: la fonc-

tion s'écrit $u = f\left(\frac{1}{t}\right)$; nous l'appellerons $\varphi(t)$. Cette fonction $\varphi(t)$ devient infinie pour $t = 0$, sans devenir indéterminée. En vertu du théorème III, on peut la mettre sous la forme

$$\varphi(t) = \frac{A_0}{t^n} + \frac{A_1}{t^{n-1}} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{t} + \psi(t).$$

La fonction $\psi(t)$, ne devenant infinie pour aucune valeur de t, est une constante A_n. On a donc

$$\varphi(t) = \frac{A_0}{t^n} + \frac{A_1}{t^{n-1}} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{t} + A_n,$$

et, par suite,

$$f(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots + A_{n-1} z + A_n.$$

Ainsi la fonction $f(z)$ est une fonction entière du $n^{\text{ième}}$ degré.

41. Théorème VII. — *Toute fonction monodrome et monogène, qui n'admet qu'un nombre limité d'infinis, est une fraction rationnelle.*

Considérons d'abord le cas où la fonction $f(z)$ admet n infinis simples $a, b, c, \ldots, l$, et prend une valeur finie et déterminée P pour $z = \infty$.

La fonction, devenant infinie pour $z = a$, s'écrira sous la forme

$$f(z) = \frac{A}{z - a} + \varphi(z),$$

la fonction $\varphi(z)$ ne devenant plus infinie pour $z = a$. La fonction $\varphi(z)$, devenant infinie pour $z = b$, s'écrira sous la forme

$$\varphi(z) = \frac{B}{z - b} + \chi(z).$$

En continuant de cette manière, on arrivera enfin à une fonction qui n'aura plus d'infini, et qui, par conséquent sera une constante P. On aura donc

$$u = f(z) = \frac{A}{z - a} + \frac{B}{z - b} + \ldots + \frac{L}{z - l} + P.$$

La démonstration est la même quand il y a des infinis mu

tiples. Soit p le degré de l'infini a, q celui de b, etc. La fonction proposée pourra être mise sous la forme

$$u = \frac{A_0}{(z-a)^p} + \frac{A_1}{(z-a)^{p-1}} + \ldots + \frac{A_{p-1}}{z-a}$$
$$+ \frac{B_0}{(z-b)^q} + \frac{B_1}{(z-b)^{q-1}} + \ldots + \frac{B_{q-1}}{z-b}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \varphi(z).$$

La fonction $\varphi(z)$, ne devenant plus infinie que pour $z = \infty$, est une fonction entière.

En réduisant ces fractions simples au même dénominateur, on voit que la fonction u est une fraction rationnelle dont le terme le plus élevé est du degré n, si n désigne le nombre total des infinis. A chaque valeur de u correspondent n valeurs de z, c'est-à-dire que la fonction prend la même valeur en n points du plan. Cette fonction admet aussi n zéros. Ainsi le nombre des zéros est le même que celui des infinis.

42. Théorème VIII. — *Toute fonction monogène, qui admet m valeurs pour chaque valeur de z, devient nécessairement infinie.*

Désignons par $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$ les m valeurs que prend la fonction u pour une même valeur de z. Considérons une fonction symétrique de ces m quantités, par exemple leur somme

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{m-1}.$$

Quand la variable z décrit un contour fermé, ces valeurs de la fonction se permutent les unes dans les autres suivant une certaine loi; mais la fonction symétrique ne change pas. Cette fonction symétrique est donc monodrome. Puisqu'elle doit devenir infinie, il faut que l'un des termes de la somme devienne infini.

43. Théorème IX. — *Toute fonction monogène, qui a m valeurs pour chaque valeur de z et qui n'admet qu'un nombre limité d'infinis, est racine d'une équation algébrique.*

Représentons toujours par $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$ les m valeurs de u, et considérons les fonctions symétriques

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{m-1},$$
$$u_0 u_1 + u_1 u_2 + \ldots,$$
$$u_0 u_1 u_2 + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_0 u_1 u_2 \ldots u_{m-1},$$

savoir, la somme des m valeurs, la somme des produits deux à deux, la somme des produits trois à trois, etc., enfin le produit des m valeurs. Chacune de ces fonctions symétriques, étant monodrome et n'ayant qu'un nombre limité d'infinis, est une fraction rationnelle en z. La fonction u satisfait donc à une équation algébrique du degré m, dont les coefficients sont des fractions rationnelles en z.

Cette équation est irréductible; car si la fonction u satisfaisait à une équation de degré moindre, elle n'aurait pas m valeurs.

Corollaire.—*Une fonction définie par une équation algébrique irréductible du* $m^{\text{ième}}$ *degré prend m valenrs pour chaque valeur de la variable.*

On part de la valeur $z = z_0$ avec une certaine valeur initiale $u = u_0$, et l'on suit, pour aller à un point quelconque du plan, soit le chemin rectiligne, soit des lignes comprenant un ou plusieurs points pour lesquels l'équation a des racines égales. Ces chemins donneront m valeurs différentes de la fonction; car, si la fonction n'en prenait qu'un nombre moindre, elle satisferait à une équation de degré inférieur.

LIVRE II.

DES FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

MÉTHODE GÉNÉRALE POUR L'ÉTUDE DES FONCTIONS DÉFINIES PAR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

44. Les cas où l'on peut intégrer une équation différentielle sont extrêmement rares, et doivent être regardés comme des exceptions. Mais on peut considérer une équation différentielle comme définissant une fonction d'après son mode de génération, et se proposer d'étudier les propriétés de cette fonction sur l'équation différentielle elle-même.

Soit

$$\frac{du}{dz} = f(u, z)$$

une équation différentielle du premier ordre ; u sera une fonction de z, définie par la condition de satisfaire à l'équation différentielle et d'admettre une valeur initiale donnée u_0 pour $z = z_0$. M. Cauchy a démontré que si le coefficient différentiel $f(u, z)$ est une fonction synectique pour les valeurs de u et de z voisines de u_0 et de z_0, la fonction intégrale u est elle-même synectique pour les valeurs de z voisines de z_0. Nous donnons d'abord une démonstration plus simple de ce théorème de l'illustre géomètre, qui est notre point de départ.

45. *Lemme I.* — Soit $f(x)$ une fonction synectique de la variable imaginaire x, dans le cercle décrit du point x_0 comme

centre avec un rayon r, et sur la circonférence elle-même. Appelons M le maximum du module de la fonction $f(x)$ dans le cercle de rayon r. Si, dans la formule (n° 25)

$$f^n(x_0) = \frac{1.2\ldots n}{r^n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_0 + re^{\theta i})e^{-n\theta i}\,d\theta,$$

on remplace chaque élément de l'intégrale définie par la quantité $\mathrm{M}\,d\theta$ plus grande que son module, on augmente évidemment le module de l'intégrale définie qui se réduit alors à $2\pi\mathrm{M}$, et l'on a

$$(1)\qquad \operatorname{mod} f^n(x_0) < 1.2\ldots n\,\frac{\mathrm{M}}{r^n}.$$

46. *Lemme II*. — Soit $f(x, y, z)$ une fonction synectique par rapport à chacune des variables imaginaires x, y, z, quand ces variables restent comprises respectivement dans des cercles de rayons r, r', r'' décrits des points x_0, y_0, z_0 comme centres, et sur les circonférences elles-mêmes. Appelons de même M le maximum du module de la fonction dans l'étendue des valeurs considérées. Si, dans la formule (n° 31)

$$\mathrm{D}_{xyz}^{n+n'+n''} f(x_0, y_0, z_0) = 1.2\ldots n.1.2\ldots n'.1.2.\,.n''\,\frac{r^{-n}\,r'^{-n'}\,r''^{-n''}}{(2\pi)^3}$$

$$\times \int\!\!\int\!\!\int_0^{2\pi} f(x_0+re^{\theta i}, y_0+r'e^{\theta' i}, z_0+r''e^{\theta'' i})\,e^{-(n\theta+n'\theta'+n''\theta'')i}\,d\theta\,d\theta'\,d\theta''$$

on remplace chaque élément de l'intégrale multiple par une quantité $\mathrm{M}\,d\theta\,d\theta'\,d\theta''$ plus grande que son module, on augmente le module de l'intégrale, et l'on a

$$(2)\qquad \begin{cases} \operatorname{mod} \mathrm{D}_{x,y,z}^{n+n'+n''} f(x_0, y_0, z_0) \\ < 1.2\,..n.1.2\,..n'.1.2\ldots n''\,\dfrac{\mathrm{M}}{r^n\,r'^{n'}\,r''^{n''}}. \end{cases}$$

47. *Lemme III*. — Il est facile de composer une fonction dont les dérivées partielles aient en x_0, y_0, z_0 des valeurs égales

aux limites assignées pour les modules des dérivées correspondantes de la fonction proposée $f(x, y, z)$.

Considérons en effet la fonction

$$(3) \quad \varphi(x,y,z) = \frac{M}{\left(1-\frac{x-x_0}{r}\right)\left(1-\frac{y-y_0}{r'}\right)\left(1-\frac{z-z_0}{r''}\right)}$$

qui se développe en série convergente, tant que les différences $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ ont des modules respectivement moindres que r, r', r''. Le terme général de la série est de la forme

$$M \frac{(x-x_0)^n}{r^n} \frac{(y-y_0)^{n'}}{r'^{n'}} \frac{(z-z_0)^{n''}}{r''^{n''}}.$$

Si l'on prend une dérivée quelconque $D_{xyz}^{n+n'+n''}$ de la fonction $\varphi(x,y,z)$ et que l'on y fasse $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$, le terme écrit plus haut donne

$$1.2\ldots n.1.2\ldots n'.1.2\ldots n''. \frac{M}{r^n r'^{n'} r''^{n''}},$$

et les résultats fournis par les autres termes s'évanouissent. On a donc

$$\left[D_{xyz}^{n+n'+n''} \varphi(x,y,z)\right]_0 = 1.2\ldots n.1.2\ldots n'.1.2\ldots n'' \frac{M}{r^n r'^{n'} r''^{n''}}.$$

Ainsi, en x_0, y_0, z_0, les dérivées de la fonction φ sont des limites supérieures des modules des dérivées de la fonction f.

Les principes, que nous venons de rappeler, sont dus à M. Cauchy. Nous allons, à l'aide de ces principes, démontrer d'une manière très-simple l'existence des fonctions intégrales.

48. Considérons d'abord une équation différentielle

$$(4) \qquad \frac{du}{dz} = f(z,u);$$

la variable z part du point $z=z_0$, la fonction u ayant une certaine valeur initiale $u=u_0$. Nous supposons que le coefficient différentiel $f(z,u)$ est une fonction synectique des

deux variables z et u dans le voisinage des valeurs z_0 et u_0.

Pour simplifier, représentons les variables par $z_0 + z$ et $u_0 + u$; la variable z partira alors de $z = 0$, la fonction u ayant la valeur initiale $u = 0$. Le coefficient différentiel est synectique pour toutes les valeurs de z et de u situées dans des cercles décrits des points z_0 et u_0 pris pour origine avec des rayons égaux à ρ et à r et sur les circonférences elles-mêmes. Nous appellerons M le maximum du module de la fonction f dans cette étendue.

Si l'équation différentielle admet une intégrale synectique, on obtiendra ses dérivées successives au moyen des équations

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dz} = f(z, u), \\ \dfrac{d^2 u}{dz^2} = \dfrac{df}{dz} + \dfrac{df}{du}\dfrac{du}{dz}, \\ \dfrac{d^3 u}{dz^3} = \dfrac{d^2 f}{dz^2} + 2\dfrac{d^2 f}{dz\,du}\dfrac{du}{dz} + \dfrac{d^2 f}{du^2}\left(\dfrac{du}{dz}\right)^2 + \dfrac{df}{du}\dfrac{d^2 u}{dz^2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

que l'on déduit de la première par la différentiation.

Imaginons que, dans les seconds membres, on remplace les valeurs de la fonction f et de ses dérivées partielles pour $z = 0$ et $u = 0$ par leurs modules; la première donnera le module de $\left(\dfrac{du}{dz}\right)_0$; en portant cette valeur dans la seconde, on aura une limite supérieure du module de $\left(\dfrac{d^2 u}{dz^2}\right)_0$; en portant ces valeurs dans la troisième, on aura une limite supérieure du module de $\left(\dfrac{d^3 u}{dz^3}\right)_0$; et ainsi de suite.

En vertu du lemme III, les dérivées partielles de la fonction $f(z, u)$ ont, pour $z = 0$ et $u = 0$, des valeurs dont les modules sont moindres que les dérivées correspondantes de la fonction

$$\varphi(z, u) = \frac{M}{\left(1 - \dfrac{z}{\rho}\right)\left(1 - \dfrac{u}{r}\right)}.$$

Considérons l'équation différentielle

$$(6) \qquad \frac{dv}{dz} = \varphi(z, v) = \frac{M}{\left(1 - \frac{z}{\rho}\right)\left(1 - \frac{v}{r}\right)},$$

dans laquelle nous donnons à la fonction v la valeur initiale $v = 0$ pour $z = 0$. Si cette nouvelle équation admet une intégrale synectique, on obtiendra ses dérivées successives au moyen des équations

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{dv}{dz} = \varphi(z, v), \\ \frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{d\varphi}{dz} + \frac{d\varphi}{dv}\frac{dv}{dz}, \\ \frac{d^3 v}{dz^3} = \frac{d^2\varphi}{dz^2} + 2\frac{d^2\varphi}{dz\,dv}\frac{dv}{dz} + \frac{d^2\varphi}{dv^2}\left(\frac{dv}{dz}\right)^2 + \frac{d\varphi}{dv}\frac{d^2 v}{dz^2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

analogues aux équations (5). Quand on y fait $z = 0$ et $v = 0$, la fonction φ et ses dérivées partielles prenant toutes des valeurs positives, les seconds membres sont des sommes de termes positifs, et l'on en déduit successivement pour $\left(\frac{dv}{dz}\right)_0$, $\left(\frac{d^2 v}{dz^2}\right)_0$, $\left(\frac{d^3 v}{dz^3}\right)_0$, ..., des valeurs positives. Ainsi la fonction v a pour $z = 0$ toutes ses dérivées réelles et positives.

Comparons maintenant les équations (5) et (7). On voit d'abord que le module de $\left(\frac{du}{dz}\right)_0$ est moindre que $\left(\frac{dv}{dz}\right)_0$. Les modules des termes de la seconde équation étant moindres que les termes de l'équation correspondante, le module de $\left(\frac{d^2 u}{dz^2}\right)_0$ est moindre que $\left(\frac{d^2 v}{dz^2}\right)_0$, et ainsi de suite. On conclut de là que, si les fonctions u et v existent, les dérivées de la première ont, pour $z = 0$, des valeurs dont les modules sont respectivement moindres que les dérivées de la seconde.

Mais la fonction v existe certainement; car l'équation dif-

férentielle (6) peut être intégrée facilement, et donne pour équation intégrale

$$(8)\qquad v - \frac{v^2}{2r} = -M\rho L\left(1 - \frac{z}{\rho}\right),$$

v s'évanouissant avec z. Cette équation définit une fonction implicite v s'évanouissant avec z, et restant synectique pour toutes les valeurs de la variable z inférieures ou égales à un certain module R que l'on peut assigner. En effet, la fonction v reste monodrome jusqu'au point où les deux racines de l'équation (8) deviennent égales entre elles; ceci a lieu lorsque la dérivée $1 - \frac{v}{r}$ du premier membre par rapport à v devient nulle, c'est-à-dire lorsque $v = r$; la valeur correspondante R de z, valeur réelle, positive et moindre que f, est donnée par la formule

$$L\left(1 - \frac{R}{\rho}\right) = -\frac{r}{2M\rho}.$$

Si l'on appelle A le maximum du module de la fonction v dans le cercle de rayon R, on aura, d'après le lemme I,

$$\left(\frac{d^n v}{dz^n}\right)_0 < 1.2\ldots n.\frac{A}{R^n}.$$

On aura donc, à plus forte raison,

$$\text{mod}\left(\frac{d^n u}{dz^n}\right)_0 < 1.2\ldots n.\frac{A}{R^n}.$$

Il en résulte que la série

$$(9)\qquad u = \left(\frac{du}{dz}\right)_0 \frac{z}{1} + \left(\frac{d^2 u}{dz^2}\right)_0 \frac{z^2}{1.2} + \ldots,$$

ordonnée suivant les puissances croissantes de z, est convergente pour toutes les valeurs de z ayant leurs modules inférieurs à R. Car, le terme général de la série ayant un module moindre que

$$\left(\frac{\text{mod } z}{R}\right)^n A,$$

on voit que si le module de z est inférieur à R, la série des modules est convergente, et par conséquent la série proposée. Cette série convergente définit une fonction synectique dans le cercle de rayon R.

Il reste à faire voir que la fonction u, définie par la série, satisfait bien à l'équation différentielle proposée (4). Si dans cette équation on remplace u par sa valeur, on a, d'une part,

$$\frac{du}{dz} = \left(\frac{du}{dz}\right)_0 + \left(\frac{d^2 u}{dz^2}\right)_0 \frac{z}{1} + \left(\frac{d^3 u}{dz^3}\right)_0 \frac{z^2}{1.2} + \ldots;$$

d'autre part,

$$f(z, u) = f_0 + f'_0 \frac{z}{1} + f''_0 \frac{z^2}{1.2} + \ldots,$$

en appelant $f', f'', \ldots$, les dérivées totales de la fonction f calculées au moyen des équations

$$(10) \quad \begin{cases} f' = \dfrac{df}{dz} + \dfrac{df}{du}\dfrac{du}{dz}, \\ f'' = \dfrac{d^2 f}{dz^2} + 2\dfrac{d^2 f}{dz\,du}\dfrac{du}{dz} + \dfrac{d^2 f}{du^2}\left(\dfrac{du}{dz}\right)^2 + \dfrac{df}{du}\dfrac{d^2 u}{dz^2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

On fera dans ces équations $z = 0$, $u = 0$, et l'on remplacera $\left(\frac{du}{dz}\right)_0$, $\left(\frac{d^2 u}{dz^2}\right)_0$, ..., par leurs valeurs déduites des équations (5). Mais on voit que les seconds membres des équations (5) et (10) sont alors identiquement les mêmes ; on a donc

$$f'_0 = \left(\frac{d^2 u}{dz^2}\right)_0, \quad f''_0 = \left(\frac{d^3 u}{dz^3}\right)_0, \ldots,$$

et, par suite, l'équation différentielle est vérifiée.

49. La même méthode s'applique aux équations différentielles simultanées. Soient m équations simultanées

$$(11) \quad \frac{du}{dz} = f(z, u, u', \ldots), \quad \frac{du'}{dz} = f_1(z, u, u', \ldots), \ldots,$$

dans lesquelles nous supposerons que la variable z parte de $z = 0$, les fonctions u, u',... ayant les valeurs initiales zéro.

Les coefficients différentiels sont des fonctions synectiques par rapport aux variables $z, u, u', \ldots$, tant que les modules de ces variables restent inférieurs ou égaux à $\rho, r, r', \ldots$ Appelons $M, M_1, \ldots$, les maxima des modules des fonctions $f, f_1, \ldots$ dans cette étendue, et posons

$$\varphi = \frac{1}{\left(1-\frac{z}{\rho}\right)\left(1-\frac{u}{r}\right)\left(1-\frac{u'}{r'}\right)\cdots}.$$

En vertu du lemme III, les dérivées partielles des fonctions $f, f_1, \ldots$ ont, pour $z=0, u=0, \ldots$, des valeurs dont les modules sont respectivement moindres que les dérivées correspondantes des fonctions $M\varphi, M_1\varphi, \ldots$. Si l'on compare les équations différentielles proposées aux équations différentielles simultanées,

$$\frac{dv}{dz} = M\varphi(z, v, v', \ldots), \quad \frac{dv'}{dz} = M_1\varphi(z, v, v', \ldots), \ldots,$$

on verra, comme précédemment, que les dérivées $\left(\frac{du}{dz}\right)_0$, $\left(\frac{du'}{dz}\right)_0, \ldots, \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)_0, \left(\frac{d^2u'}{dz^2}\right)_0, \ldots$, déduites des premières par un calcul de proche en proche, ont des modules respectivement moindres que les quantités réelles et positives $\left(\frac{dv}{dz}\right)_0$, $\left(\frac{dv'}{dz}\right)_0, \ldots, \left(\frac{d^2v}{dz^2}\right)_0, \left(\frac{d^2v'}{dz^2}\right)_0, \ldots$, que l'on déduit des secondes par un calcul analogue.

Mais ces dernières équations peuvent être intégrées facilement ; on a d'abord

$$\frac{dv}{M} = \frac{dv'}{M_1} = \ldots,$$

d'où

$$\frac{v}{M} = \frac{v'}{M_1} = \ldots = k;$$

si l'on porte les valeurs de $v, v', \ldots$, dans l'une d'elles, il vient

$$(12) \qquad \left(1-\frac{M}{r}k\right)\left(1-\frac{M_1}{r'}k\right) \ldots dk = \frac{dz}{1-\frac{z}{\rho}}:$$

on en déduit, par l'intégration,

$$(13)\quad \begin{cases} k - \left(\frac{M}{r} + \frac{M_1}{r'} + \ldots\right)\frac{k^2}{2} + \left(\frac{MM_1}{rr'} + \ldots\right)\frac{k^3}{3} - \ldots \\ = -\rho \, L\left(1 - \frac{z}{\rho}\right). \end{cases}$$

Cette équation définit une fonction k s'évanouissant avec z et restant synectique jusqu'à un certain module R. Si l'on appelle A le maximum du module de la fonction k dans cette étendue, on a

$$\left(\frac{d^n k}{dz^n}\right)_0 < 1.2\ldots n.\frac{A}{R^n}.$$

On aura donc, à plus forte raison,

$$\text{mod}\left(\frac{d^n u}{dz^n}\right)_0 < 1.2\ldots n.\frac{MA}{R^n},$$
$$\text{mod}\left(\frac{d^n u'}{dz^n}\right)_0 < 1.2\ldots n.\frac{M_1 A}{R^n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Il en résulte que les séries

$$u = \left(\frac{du}{dz}\right)_0 \frac{z}{1} + \left(\frac{d^2 u}{dz^2}\right)_0 \frac{z^2}{1.2} + \ldots,$$
$$u' = \left(\frac{du'}{dz}\right)_0 \frac{z}{1} + \left(\frac{d^2 u'}{dz^2}\right)_0 \frac{z^2}{1.2} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

sont convergentes pour toutes les valeurs de z dont le module est moindre que R. Ces séries définissent des fonctions synectiques dans le cercle de rayon R, et satisfaisant aux équations différentielles proposées.

Il est facile d'évaluer le rayon de convergence R. La fonction k, s'évanouissant avec z, reste monodrome jusqu'à ce que deux racines de l'équation (13) deviennent égales entre elles. Ceci a lieu lorsque la dérivée du premier membre de l'équation (13) par rapport à ν, ou le premier membre de l'équation (12), devient égal à zéro; les valeurs de k, qui annulent

cette dérivée, sont $\frac{r}{\mathrm{M}}, \frac{r'}{\mathrm{M}_1}, \ldots$; on portera la plus petite de ces valeurs dans l'équation (13), et l'on en déduira la valeur correspondante R, réelle et positive, de z.

On arrive à une formule très-simple en remplaçant, ce qui est permis, les modules $r, r', \ldots$, par le plus petit d'entre eux, et les maxima $\mathrm{M}, \mathrm{M}_1, \ldots$, par le plus grand d'entre eux ; l'équation (12) prend alors la forme

$$\left(1 - \frac{\mathrm{M}}{r} k\right)^m dk = \frac{dz}{1 - \frac{z}{\rho}},$$

d'où l'on déduit, par l'intégration,

$$\frac{r}{(m+1)\mathrm{M}}\left[1 - \left(1 - \frac{\mathrm{M}}{r} k\right)^{m+1}\right] = -\rho \,\mathrm{L}\left(1 - \frac{z}{\rho}\right).$$

La fonction k reste monodrome jusqu'à une valeur R de z donnée par la formule

$$\mathrm{L}\left(1 - \frac{\mathrm{R}}{\rho}\right) = -\frac{r}{(m+1)\mathrm{M}\rho}.$$

Les limites de convergence données par notre méthode sont plus étendues que celles qui ont été trouvées par M. Cauchy. C'est un avantage dans l'emploi des séries pour l'intégration.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant :

Théorème I. — *Un système d'équations différentielles simultanées admet, pour intégrales, des fonctions synectiques, tant que les coefficients différentiels restent eux-mêmes synectiques.*

50. Nous avons démontré que l'équation différentielle $\frac{du}{dz} = f(u, z)$ admet une intégrale synectique. Il n'existe pas d'autre fonction satisfaisant à l'équation différentielle proposée, et devenant égale à u_0 pour $z = z_0$. Soit u l'intégrale synectique, et supposons qu'il existe une seconde intégrale que nous représenterons par $u + v$, la fonction v s'évanouissant

pour $z = z_0$, nous aurons

$$\frac{d(u+v)}{dz} = f(u+v, z),$$

d'où

$$\frac{dv}{dz} = f(u+v, z) - f(u, z).$$

Puisque le second membre s'annule pour $v = 0$, il contient une puissance entière de v en facteur, et l'on a

$$\frac{dv}{dz} = v^m \varphi(z),$$

en supposant que dans le quotient on ait remplacé u et v par leurs valeurs en fonction de z. L'intégration le long d'une courbe quelconque donne

$$\frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{v_0^{m-1}} - \frac{1}{v^{m-1}}\right) = \int_{z_0}^{z} \varphi(z)\, dz.$$

L'intégrale définie ayant une valeur finie et v_0 devant être nulle, cette égalité est impossible. Quand $m = 1$, l'équation différentielle devient

$$\frac{dv}{v} = \varphi(z)\, dz,$$

d'où

$$v = v_0 e^{\int_{z_0}^{z} \varphi(z)\, dz}.$$

Puisque $v_0 = 0$, la fonction v est identiquement nulle.

Ainsi l'équation différentielle proposée n'admet pas d'intégrale, prenant la valeur u_0 pour $z = z_0$, autre que l'intégrale synectique.

51. Pour engendrer la fonction u, nous partons du point z_0, avec une valeur initiale arbitraire u_0, et nous faisons mouvoir la variable z sur une courbe quelconque dans une portion déterminée du plan. Tant que le coefficient différentiel donné $f(u, z)$ reste synectique pour les valeurs de z et les valeurs correspondantes de u, la fonction u, en vertu du théorème pré-

cédent, reste elle-même synectique. Ainsi, quel que soit le chemin suivi dans cette portion du plan pour aller du point z_0 au point z, la fonction u a en ce point la même valeur. Mais si, sortant de cette portion du plan, et, suivant un certain chemin, on arrive à un point z_1 tel que, pour $z = z_1$ et $u = u_1$ (u_1 étant la valeur correspondante de u), le coefficient différentiel devienne infini, ou se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, ou cesse d'être monodrome, la fonction u éprouvera autour de ce point des modifications, et acquerra des propriétés spéciales, qui se transmettront ensuite dans toute l'étendue du plan.

Cas où le coefficient différentiel devient infini.

52. Nous sommes partis du point z_0 avec la valeur initiale u_0. Supposons que, la variable arrivant au point z_1, la fonction acquière une valeur u_1 telle que, pour $z = z_1$ et $u = u_1$, le coefficient différentiel $f(u, z)$ devienne infini, de manière toutefois que son inverse $\frac{1}{f(u, z)}$ reste fini et continu dans le voisinage de ces valeurs. Posons

$$z = z_1 + z', \quad u = u_1 + u',$$

d'où

$$\frac{du'}{dz'} = f(u_1 + u', z_1 + z').$$

Si l'on regarde z' comme une fonction de u', cette fonction devra satisfaire à l'équation différentielle

$$\frac{dz'}{du'} = \frac{1}{f(u_1 + u', z_1 + z')},$$

et admettre la valeur initiale $z' = 0$ pour $u' = 0$.

La fonction

$$\frac{1}{f(u_1 + u', z_1 + z')},$$

restant finie et continue, est développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de u' et de z', et l'on a

$$(14) \qquad \frac{dz'}{du'} = a u'^m + b z' + c u' z' + e z'^2 + \dots.$$

Si le second membre ne renfermait aucun terme indépendant de z', l'équation différentielle se mettrait sous la forme

$$\frac{dz'}{du'} = z'(b + cu' + ez' + \ldots),$$

d'où l'on déduirait

$$\log \frac{z'}{z'_1} = \int_{u'_1}^{u'} (b + cu' + ez' + \ldots)\, du',$$

en appelant z'_1 la valeur de z' qui correspond à u'_1. Quand z' et u' tendent vers zéro, le second membre tend vers une valeur finie, tandis que le premier croît indéfiniment. Dans ce cas, l'équation différentielle n'admet aucune intégrale s'annulant avec z'.

Ainsi la série renferme au moins un terme indépendant de z'; nous désignerons par au'^m celui des termes de ce genre du degré le moins élevé. Avec la valeur initiale $z' = 0$ pour $u' = 0$, l'équation différentielle (14) définit sans difficulté une fonction de u' synectique dans le voisinage de $u' = 0$, et, par conséquent, développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances entières et croissantes de u'. Soit

$$z' = A_0 u^{\alpha} + A_1 u^{\alpha+1} + \ldots$$

cette fonction. L'équation différentielle devant être satisfaite, si l'on substitue à la place de z' cette valeur, on aura

$$A_0 \alpha u'^{\alpha-1} + A_1(\alpha+1) u'^{\alpha} \ldots = au'^m + b A_0 u'^{\alpha} + \ldots.$$

En identifiant ces deux séries, égales pour toutes les valeurs de u' inférieures à un certain module, on déterminera les exposants et les coefficients de la série z'. Les premiers termes donnent

$$\alpha = m + 1, \quad A_0 = \frac{a}{\alpha} = \frac{a}{m+1};$$

d'où

(15) $$z' = \frac{a}{m+1} u'^{m+1} + \ldots\ldots$$

Réciproquement, si l'on considère u' comme une fonction de z', cette fonction sera déterminée implicitement par l'équa-

tion (15). A chaque valeur très-petite de z' correspondent $(m+1)$ valeurs très-petites de u'; ces valeurs sont sensiblement égales aux racines de l'équation binôme

$$\frac{a}{m+1} u'^{m+1} = z',$$

et l'on a approximativement

$$u' = B_0 z'^{\frac{1}{m+1}},$$

en désignant par B_0 la quantité $\left(\frac{m+1}{a}\right)^{\frac{1}{m+1}}$. Posons $z' = \rho\, e^{\theta i}$ et appelons u'_0, u'_1, u'_2, ..., u'_m les $m+1$ valeurs de u' disposées suivant les sommets d'un polygone régulier, savoir :

$$u'_0 = B_0 \rho^{\frac{1}{m+1}} e^{\frac{\theta i}{m+1}}, \quad u'_1 = B_0 \rho^{\frac{1}{m+1}} e^{\frac{\theta+2\pi}{m+1} i}, \ldots,$$

$$u'_m = B_0 \rho^{\frac{1}{m+1}} e^{\frac{\theta+2m\pi}{m+1} i}.$$

Quand le point z' décrit un cercle très-petit autour du point $z' = 0$, l'argument augmentant de 2π, u'_0 se change en u'_1, u'_1 en u'_2, ..., u'_m en u'_0. On conclut de là :

Théorème II. — *Lorsque, pour un système de valeurs simultanées z_1 et u_1, le coefficient différentiel devient infini, si l'on désigne par m l'ordre de la première dérivée partielle de la fonction $\frac{1}{f}$ par rapport à u qui ne s'annule pas, la fonction intégrale u prend $m+1$ valeurs qui se permutent les unes dans les autres circulairement, quand la variable z tourne autour du point z_1; après $m+1$ tours, la fonction revient à sa valeur primitive.*

Ainsi s'engendrent les fonctions multiples. Les fonctions algébriques, étudiées par M. Puiseux, rentrent dans cette catégorie; et en effet, lorsqu'en un point du plan l'équation admet des racines égales, le coefficient différentiel devient en général infini.

Posons $z' = z''^{m+1}$. Quand z'' fait un tour, z' en fait $m+1$,

et par conséquent u' en fait un et revient à la même valeur. Ainsi la fonction u' est monodrome par rapport à la variable z''; elle est d'ailleurs monogène; donc elle se développe en une série convergente ordonnée suivant les puissances entières croissantes de z'' ou de $z'^{\frac{1}{m+1}}$, et l'on a

$$u' = B_0 z'^{\frac{1}{m+1}} + B_1 z'^{\frac{2}{m+1}} + \ldots.$$

Il resterait maintenant à examiner ce qui arrive lorsque le coefficient différentiel se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, ou cesse d'être monodrome; mais nous ne pousserons pas plus loin ici cette étude : ce qui précède suffit pour le but que nous nous proposons. Nous avons traité avec détail cette question importante dans un Mémoire inséré au 36e cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique*, et auquel nous renvoyons le lecteur.

CHAPITRE II.

APPLICATION AUX FONCTIONS SIMPLEMENT PÉRIODIQUES.

De la fonction e^z.

53. Nous avons démontré que toute équation différentielle engendre une fonction, et indiqué la marche à suivre pour étudier les propriétés de cette fonction. Avant d'aborder l'étude des fonctions doublement périodiques, nous allons, pour faciliter l'intelligence de la méthode, considérer quelques équations différentielles très-simples, donnant naissance à des fonctions simplement périodiques.

Considérons d'abord la fonction définie par l'équation différentielle

$$(1) \qquad \frac{du}{dz} = u,$$

et admettant la valeur $u = 1$ pour $z = 0$. Le coefficient différentiel étant une fonction synectique de u, il est clair que, tant

que u conserve une valeur finie, la fonction intégrale u reste elle-même fonction monodrome de z. Mais il est aisé de voir que cette fonction u ne devient infinie pour aucune valeur finie de z; car, la fonction inverse étant donnée par l'intégrale définie

$$(2) \qquad z = \int_1^u \frac{du}{u},$$

si u s'éloigne à l'infini suivant une ligne quelconque, z va aussi à l'infini. La fonction u définie par l'équation différentielle proposée, restant finie, continue, monodrome et monogène pour toutes les valeurs finies de z, est une fonction *synectique* de z, dans toute l'étendue du plan.

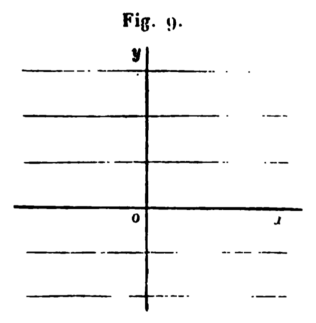
Cette fonction est périodique; car à une même valeur de u correspondent toutes les valeurs que peut acquérir l'intégrale définie (2), quand on va du point 1 au point u par différents chemins; la fonction, placée sous le signe somme, devenant infinie pour $u = 0$, tous ces chemins peuvent se réduire au chemin rectiligne augmenté d'un nombre quelconque de fois le contour élémentaire qui enveloppe le point $u = 0$. Si l'on désigne par z l'intégrale rectiligne, et par ω l'intégrale le long du contour élémentaire, on voit qu'à chaque valeur de u correspondent une infinité de valeurs de z en progression arithmétique, savoir $z + m\omega$, m étant un entier quelconque positif ou négatif. Donc u est une fonction simplement périodique de z; la période ω a pour valeur $2\pi i$. On sait que la fonction u n'est autre chose que e^z, lorsque la variable z est réelle; il convient de la représenter par le même signe lorsque la variable devient imaginaire.

Soit u_1 la valeur de la fonction pour une valeur déterminée z_1 de la variable; posons $z = z_1 + z'$, $u = u_1 u'$, z' étant une nouvelle variable, u' la nouvelle fonction; l'équation différentielle devient $\frac{du'}{dz'} = u'$, et l'on a encore $u' = 1$ pour $z' = 0$. On en conclut $u' = e^{z'}$, ce qui donne la relation fondamentale $e^{z_1 + z'} = e^{z_1} \times e^{z'}$.

Imaginons que l'on trace dans le plan des parallèles à l'axe

ox (*fig.* 9), à égale distance 2π les unes des autres; ces parallèles partageront le plan en bandes égales. Quand la variable z se meut dans une bande, la fonction e^z passe par toutes les valeurs possibles, et une seule fois par chacune d'elles : elle devient infinie si la variable z s'éloigne à l'infini vers la droite, nulle au contraire si elle s'éloigne à l'infini vers la gauche. Quand la variable z passe d'une bande à l'autre, la fonction reprend périodiquement la même valeur.

Fig. 9.



L'équation différentielle $\frac{du}{dz} = au$, avec la condition $u = 1$ pour $z = 0$, produirait évidemment la fonction $u = e^{az}$.

De la fonction tang *z*.

54. Considérons en second lieu la fonction définie par l'équation différentielle

$$(3) \qquad \frac{du}{dz} = 1 + u^2,$$

et admettant la valeur initiale $u = 0$ pour $z = 0$.

La dérivée étant une fonction synectique de u, la fonction intégrale u reste monodrome tant qu'elle conserve une valeur finie. Mais il peut arriver ici que u devienne infinie pour une valeur finie de z; car l'intégrale définie

$$(4) \qquad z = \int_0^u \frac{du}{1 + u^2}$$

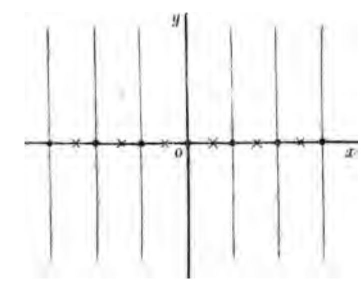
tend vers une valeur finie quand u s'éloigne à l'infini dans une direction quelconque. Soit donc α une valeur finie de z qui rend u infinie; pour voir ce qui arrive dans le voisinage de ce point $z = \alpha$, nous poserons $z = \alpha + z'$, $u = \frac{1}{v}$; l'équation différentielle devient

$$(5) \qquad \frac{dv}{dz'} = -(1 + v^2),$$

ν se réduisant à zéro pour $z' = 0$; la fonction ν restant monodrome dans le voisinage du point $z = \alpha$; il en est de même de la fonction u. Ainsi l'équation différentielle proposée définit une fonction de z monodrome dans toute l'étendue du plan; mais cette fonction n'est pas synectique, car elle devient infinie pour des valeurs finies de z.

Cette fonction est périodique; à une même valeur de u correspondent les valeurs de z données par l'intégrale définie (4), dans laquelle il faut concevoir que la ligne d'intégration prenne toutes les formes possibles. La fonction $\frac{1}{1+u^2}$, placée sous le signe somme, devenant infinie pour $u = +i$ et $u = -i$, tous les chemins peuvent se réduire au chemin rectiligne augmenté d'un nombre quelconque de contours élémentaires autour de l'un ou l'autre des deux points $u = +i$, $u = -i$; ces deux contours élémentaires donnant la même intégrale $\omega = \pi$, on voit qu'à chaque valeur de u correspondent les valeurs $z + m\omega$. Ainsi la fonction u est simplement périodique, et la période est π. On désigne cette fonction par le signe *tang* z, parce que, pour les valeurs réelles de z, elle se confond avec la tangente trigonométrique de l'angle z.

Fig. 10.



Des parallèles à l'axe des y, à la distance π les unes des autres, partageront le plan en bandes égales (*fig.* 10); quand la variable z se meut dans une bande, la fonction *tang* z passe par toutes les valeurs possibles, et une seule fois par chacune d'elles; quand la variable passe d'une bande à l'autre, la fonction reprend périodiquement la même valeur. La fonction *tang* z n'a qu'un seul zéro et un seul infini dans chaque bande, dans la première le zéro est $z = 0$, l'infini $z = \frac{\pi}{2}$.

La fonction *tang z* est impaire. Car, si dans l'intégrale définie (4), on fait marcher u suivant deux chemins opposés, de part et d'autre de l'origine $u = 0$, on obtiendra pour z des valeurs égales et des signes contraires; ainsi

$$\operatorname{tang}(-z) = -\operatorname{tang} z.$$

L'équation (5) admet pour intégrale

$$v = -\operatorname{tang}(z') = -\operatorname{tang}\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - z\right);$$

il en résulte la relation

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \frac{1}{\operatorname{tang} z}.$$

Des fonctions sin z et cos z.

55. Proposons maintenant d'étudier la fonction définie par l'équation différentielle

$$(6) \qquad \frac{du}{dz} = \sqrt{G(u-a)(u-b)},$$

et admettant la valeur initiale $u = 0$ pour $z = 0$; on donne en outre la valeur initiale de la dérivée que nous désignerons par U_0. La fonction inverse

$$z = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{G(u-a)(u-b)}}$$

croît indéfiniment avec u; ainsi u ne devient infinie pour aucune valeur finie de z; il reste à examiner ce qui arrive lorsque u s'approche de l'une des valeurs a ou b pour lesquelles le radical n'est plus une fonction monodrome de u. Soit z_1 une valeur de z pour laquelle $u = a$; posons

$$z = z_1 + z', \quad u = a + u'^2;$$

l'équation différentielle devient

$$\frac{du'}{dz'} = \frac{1}{2}\sqrt{G(a - b + u'^2)},$$

u' s'évanouissant avec z'; la dérivée restant monodrome pour des valeurs suffisamment petites de u', il est clair que u' est elle-même fonction monodrome de z', dans le voisinage de $z' = 0$, et par suite u est fonction monodrome de z dans le voisinage de la valeur z_1. Il en est de même quand u atteint la

valeur b. On conclut de là que la fonction u, définie par l'équation différentielle proposée, est une fonction *synectique* de z, dans toute l'étendue du plan.

L'intégration présente ici une particularité qu'il est bon de remarquer. Quand la variable z arrive au point z_1 pour lequel $u = a$, on peut concevoir que, z continuant à varier, u conserve la valeur constante a, ou bien varie elle-même, et alors son accroissement est la valeur de u'^2, qui est indépendante du signe du radical. La même remarque s'applique au point b.

Etudions maintenant la fonction inverse donnée par l'intégrale définie

$$z = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{G(u-a)(u-b)}}.$$

Nous nous servirons pour cela d'une méthode très-élégante, dont le principe est dû à M. Cauchy, et qui a été appliquée avec beaucoup de succès par M. Puiseux à la recherche des diverses valeurs que peut acquérir une intégrale définie, quand on fait varier la ligne d'intégration.

Fig. 11.

Dans le plan servant à figurer la variation de u, marquons les deux points a et b (*fig.* 11), qui correspondent aux valeurs $u = a$, $u = b$. Désignons par (A) le contour élémentaire que l'on obtient lorsque la variable u va en ligne droite de l'origine O à un point très-voisin de a, décrit un cercle très-petit autour de ce point, puis revient à l'origine par la même droite. Désignons de même par (B) le contour élémentaire qui enveloppe le point b, et enfin appelons A et B les valeurs acquises par l'intégrale définie quand la variable u décrit chacun de ces contours avec la valeur initiale U_0 du radical. Nous remarquons d'abord que l'intégrale relative à chacun des petits cercles est infiniment petite. Quand la variable u, après avoir parcouru la droite Oa, décrit un petit cercle autour du point a, le radical change de signe, et il revient à l'origine avec la valeur $-U_0$; dans la seconde partie du mouvement, la droite aO étant parcourue en sens contraire avec un radical changé de signe, les éléments

de l'intégration se reproduisent avec le même signe, ce qui nous apprend que l'intégrale A, relative au contour élémentaire (A), est égale à deux fois l'intégrale rectiligne suivant Oa. Les mêmes considérations s'appliquent au contour élémentaire (B).

Cela posé, tous les chemins qui vont de l'origine O à un point quelconque M peuvent être ramenés au chemin rectiligne, précédé, s'il est nécessaire, d'une combinaison quelconque des contours élémentaires (A) et (B) : 1° Ceux qui se ramènent au chemin rectiligne OM, sans passer par l'un des points a ou b, donnent l'intégrale rectiligne que nous appellerons z. 2° Ceux qui se ramènent au contour élémentaire (A) suivi du chemin rectiligne OM, donnent pour intégrale $A - z$; car, après le contour élémentaire (A), le radical ayant changé de signe, le chemin rectiligne donne un résultat de signe contraire $-z$; ce qui fait $A - z$. 3° Les chemins qui se ramènent au contour élémentaire (B) suivi du chemin rectiligne OM, donnent de même $B - z$. 4° Supposons maintenant que la variable u décrive d'abord le contour élémentaire (A), puis le contour élémentaire (B), et enfin le chemin rectiligne OM ; le premier contour donnera A ; le radical ayant changé de signe, le second donnera $-B$; le radical, ayant changé de signe une seconde fois, a repris à l'origine sa valeur primitive $+U_0$, de sorte que le chemin rectiligne fournira de nouveau la valeur z; en tout $A - B + z$. En général, le double contour élémentaire (A) + (B), précédant un chemin quelconque, augmente l'intégrale de la quantité constante $\omega = A - B$; comme on peut introduire ce double contour autant de fois que l'on veut, on ajoutera à l'intégrale un multiple quelconque de ω. On aurait pu revenir à la valeur initiale primitive U_0 du radical, en parcourant deux fois successivement le contour (A), ou deux fois le contour (B); mais le résultat $A - A$ ou $B - B$ serait nul.

Nous avons trouvé d'abord l'intégrale rectiligne z, que l'on peut augmenter d'un multiple quelconque de ω, ce qui fait une première série $z + m\omega$. Nous avons trouvé ensuite une seconde valeur $A - z$, qui, augmentée de même d'un multiple quelconque de ω, donne une seconde série $A - z + m\omega$. La

troisième valeur $B - z$ rentre dans les séries précédentes ; car on a $B - z = A - z - \omega$. Il résulte de là qu'à chaque valeur de u correspondent deux séries de valeurs de z, savoir $z + m\omega$ et $A - z + m\omega$ en progression arithmétique. Ainsi la fonction u, définie par l'équation différentielle, est une fonction de z, synectique et simplement périodique. Dans chaque bande la fonction passe deux fois par la même valeur, et la somme des deux valeurs de z qui dans chaque bande donnent la même valeur de u, ont une somme constante A, abstraction faite des multiples de la période ω.

56. L'équation particulière

$$(7) \qquad \frac{du}{dz} = \sqrt{1 - u^2},$$

à laquelle on joint les conditions $u = 0$ et $U_0 = 1$ pour $z = 0$, donne naissance à la fonction synectique impaire et simplement périodique, que l'on désigne par *sin z*. L'intégrale rectiligne de $u = 0$ à $u = 1$ étant égale à $\frac{\pi}{2}$, on a $A = \pi$: d'ailleurs $B = -A$; donc $\omega = 2\pi$. A chaque valeur de u correspondent deux valeurs de z, dont la somme est constante et égale à π ; on a donc la relation

$$\sin(\pi - z) = \sin z,$$

et, par suite,

$$\sin(\pi + z) = -\sin z.$$

Si l'on pose

$$u' = \sqrt{1 - u^2},$$

l'équation différentielle devient

$$(8) \qquad \frac{du'}{dz} = -\sqrt{1 - u'^2},$$

u' ayant la valeur initiale $u' = 1$ pour $z = 0$. Cette nouvelle fonction u' est synectique par rapport à z, et simplement périodique ; on la désigne par *cos z*. En remarquant que dans l'équation (7) u acquiert la valeur $u = 1$ pour $z = \frac{\pi}{4}$, on en conclut

$$\cos z = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right).$$

Il est facile d'obtenir les relations qui existent entre les fonctions dont nous venons de parler. On a d'abord, en vertu de la relation $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,

$$D_z \cos z = -\sin z, \quad D_z \sin z = \cos z;$$

d'où

$$D_z (\cos z + i \sin z) = i (\cos z + i \sin z).$$

Comme d'ailleurs la fonction $\cos z + i \sin z$ se réduit à l'unité pour $z = 0$, on en conclut la relation

$$\cos z + i \sin z = e^{iz}.$$

Si l'on pose

$$v = \frac{\sin z}{\cos z},$$

il vient

$$D_z v = \frac{\sin^2 z + \cos^2 z}{\cos^2 z} = 1 + v^2;$$

d'ailleurs v s'évanouit avec z, il en résulte cette autre relation

$$\tang z = \frac{\sin z}{\cos z}.$$

Propriétés générales des fonctions simplement périodiques.

57. Nous venons d'étudier diverses équations différentielles donnant naissance à des fonctions simplement périodiques. C'est ici le lieu de dire quelques mots des propriétés générales des fonctions simplement périodiques.

Il est évident qu'une fonction simplement périodique, monodrome et monogène, devient infinie au moins une fois dans l'intervalle de chaque période, sans quoi la fonction ne deviendrait pas infinie dans toute l'étendue du plan. Cette fonction doit aussi devenir nulle et passer par toutes les valeurs possibles.

La plus simple des fonctions doublement périodiques est la fonction synectique $e^{\frac{2\pi z i}{\omega}}$, qui admet la période ω. Si l'on partage le plan en bandes égales par des droites parallèles à une même direction arbitraire menées à la distance ω, la fonction reprendra périodiquement la même valeur dans chacune de ces bandes aux points correspondants, c'est-à-dire aux points situés sur une parallèle à une même direction, et à

la distance ω les unes des autres. La fonction $e^{\frac{2\pi z i}{\omega}}$ ne passe qu'une fois par la même valeur dans chaque bande; elle devient infinie pour $z = +\infty$, et nulle pour $z = -\infty$.

La fonction

$$\tang \frac{\pi z}{\omega} = \frac{e^{\frac{2\pi z i}{\omega}} - 1}{i\left(e^{\frac{2\pi z i}{\omega}} + 1\right)},$$

ne passe comme la précédente qu'une fois par la même valeur, dans chaque bande. Elle n'admet qu'un seul infini simple et un seul zéro simple dans chaque bande.

58. Au moyen d'une fonction monodrome simplement périodique $\varphi(z)$ à un seul infini, on peut former une fonction simplement périodique, ayant la même période, et dans chaque période, des infinis quelconques α, β, γ,..., et des zéros quelconques en même nombre a, b, c,.... Il suffit de prendre la fonction

$$F(z) = A\,\frac{\varphi(z) - \varphi(a)}{\varphi(z) - \varphi(\alpha)} \times \frac{\varphi(z) - \varphi(b)}{\varphi(z) - \varphi(\beta)} \times \ldots.$$

Lorsqu'une fonction monodrome et monogène a une infinité d'infinis placés en ligne droite et à égale distance, et une infinité de zéros placés aussi sur une ligne droite parallèle à la précédente et à même distance, cette fonction est simplement périodique. Car on peut former une fonction simplement périodique ayant les infinis et les zéros donnés, et, d'après le théorème V (chapitre IV, livre I), la fonction proposée sera égale à cette fonction périodique multipliée par un rapport constant.

Plus généralement, concevons une fonction $f(z)$ dont les infinis et les zéros soient disposés par groupes égaux et équidistants, suivant une même direction. Je dis d'abord que, dans chaque groupe, il y a autant de zéros que d'infinis. Supposons, en effet, que la fonction $f(z)$ contienne un plus grand nombre de zéros que d'infinis; on pourra former une fonction simplement périodique $F(z)$, admettant tous les infinis de $f(z)$ et une partie des zéros : le quotient $\frac{f(z)}{F(z)}$ n'ayant plus

d'infinis, est constant; donc $f(z)$ ne peut avoir plus de zéros que $F(z)$. Supposons, au contraire, que la fonction $f(z)$ ait moins de zéros que d'infinis, on formera une fonction simplement périodique $F(z)$ admettant tous les zéros de $f(z)$ et une partie des infinis. Le quotient $\frac{F(z)}{f(z)}$ n'ayant plus d'infinis, est constant; donc $f(z)$ a autant de zéros que $F(z)$. Ainsi, dans chaque groupe, le nombre des zéros de la fonction $f(z)$ est le même que celui des infinis. Si maintenant on appelle $F(z)$ la fonction simplement périodique qui admet ces infinis et ces zéros, le quotient $\frac{f(z)}{F(z)}$ étant constant, on voit que la fonction $f(z)$ est elle-même simplement périodique.

Si la fonction périodique n'était pas monodrome et prenait m valeurs pour chaque valeur de z, elle serait racine d'une équation algébrique du degré m, ayant pour coefficients des fonctions périodiques monodromes; car toute fonction symétrique des m valeurs de la fonction est une fonction monodrome.

Il résulte de là que l'on peut caractériser l'ordre ou le degré d'une fonction simplement périodique par le nombre des infinis qu'elle admet dans chaque bande. Si elle est monodrome et admet n infinis, elle s'exprimera par une fraction rationnelle en $e^{\frac{2\pi z i}{\omega}}$ du degré n.

59. Cherchons maintenant la relation qui existe entre une fonction monodrome simplement périodique v qui ne devient infinie pour aucune valeur finie de z et la fonction $u = e^{\frac{2\pi z i}{\omega}}$. A chaque valeur de u correspond une série de valeurs de z données par la formule $z + m\omega$; mais à toutes ces valeurs de z ne correspond qu'une seule valeur de v: ainsi v est monodrome par rapport à u; d'ailleurs cette valeur de v est toujours finie, excepté pour $u = 0$ et $u = \infty$. Il en résulte que v est développable en une double série convergente ordonnée suivant les puissances entières positives et négatives de u (30), ce qui donne la série de Fourier.

CHAPITRE III.

ORIGINE DES FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES.

60. Proposons-nous d'abord d'étudier la fonction définie par l'équation différentielle

$$(1) \qquad \frac{du}{dz} = \sqrt{G(u-a)(u-b)(u-c)},$$

et la valeur initiale $u = 0$ pour $z = 0$. Il faut encore indiquer le signe avec lequel on prend le radical pour $z = 0$; nous désignerons par U_0 cette valeur initiale du radical. Cette fonction ne peut cesser d'être monodrome que lorsqu'elle devient infinie ou égale à l'une des quantités a, b, c, pour lesquelles le radical s'annule. Supposons que pour $z = z_1$ la fonction u devienne égale à a; si l'on pose

$$u = a + u'^2,$$

on a

$$\frac{du'}{dz} = \frac{1}{2}\sqrt{G(a-b+u'^2)(a-c+u'^2)}.$$

Le radical étant fonction monodrome de u', pour les valeurs de u' suffisamment petites, il en résulte que u', et par suite u, reprend la même valeur quand la variable z tourne autour du point z_1.

Mais u peut devenir infinie pour une valeur finie de z; car l'intégrale

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{G(u-a)(u-b)(u-c)}}$$

tend vers une valeur finie quand u s'éloigne indéfiniment suivant une direction quelconque. Soit donc α une valeur finie de z pour laquelle u devient infinie. Posons

$$z = \alpha + z', \quad u = \frac{1}{v},$$

l'équation différentielle devient

$$\frac{dv}{dz'} = -\sqrt{G v (1 - av)(1 - bv)(1 - cv)}.$$

Si l'on fait ensuite

$$v = v'^2,$$

elle se réduit à

$$(2) \qquad \frac{dv'}{dz'} = -\frac{1}{2}\sqrt{G(1 - av'^2)(1 - bv'^2)(1 - cv'^2)},$$

et l'on a $v' = 0$ pour $z' = 0$. La fonction v' définie par l'équation (2) restant monodrome dans le voisinage de $z' = 0$, il en est de même de la fonction u. On conclut de là que u est une fonction monodrome de z dans toute l'étendue du plan.

Etudions maintenant la fonction inverse

$$z = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{G(u-a)(u-b)(u-c)}}.$$

Dans le plan qui sert à figurer la variation de u, marquons les trois points a, b, c (*fig.* 12); désignons, comme nous l'avons fait précédemment, par (A), (B), (C) les trois contours élémentaires correspondants, et appelons A, B, C, les valeurs de l'intégrale définie relative à ces contours. Tous les chemins qui vont de l'origine à un point quelconque M du plan peuvent être ramenés au chemin rectiligne OM, ou à ce chemin rectiligne précédé de l'un des contours élémentaires ou d'une combinaison de ces contours; appelons z la valeur de l'intégrale rectiligne OM. Tous les chemins qui se ramènent au chemin rectiligne, sans passer par l'un des points a, b, c, donnent la même valeur z. Supposons que la variable u décrive d'abord le contour élémentaire (A), le radical, changeant de signe, reviendra à l'origine avec la valeur $-U_0$, de sorte que, si u parcourt ensuite le chemin rectiligne OM, l'intégrale prendra la valeur $-z$, en tout A $- z$. Supposons maintenant que

Fig. 12.

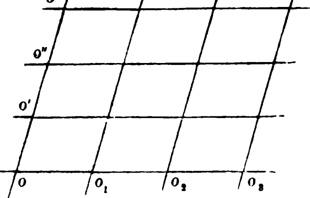
la variable u, après avoir décrit le contour (A), décrive ensuite un autre contour élémentaire (B); par un second changement de signe, le radical reviendra à l'origine avec sa valeur initiale U_0, l'intégrale ayant alors la valeur $A - B$: si l'on marche ensuite suivant un chemin quelconque, on voit que l'intégrale sera augmentée de la quantité constante $A - B$; par exemple, si l'on suit le chemin rectiligne OM, on aura $A - B + z$. La variable u pouvant décrire le double contour $(A) + (B)$ autant de fois que l'on veut, l'intégrale sera augmentée d'un multiple quelconque de la quantité constante $\omega = A - B$, qui constitue ainsi une première période. On aura de même deux autres périodes $\omega' = A - C$, $\omega'' = B - C$; mais comme $\omega'' = \omega' - \omega$, cette troisième rentre dans les deux premières. Si l'on parcourait deux fois successivement le même contour (A), on reviendrait à la valeur initiale U_0 du radical, mais la valeur de l'intégrale $A - A$ serait nulle. Ainsi il n'y a pas d'autres périodes que les deux que nous venons de trouver.

Il résulte de ce qui précède qu'à chaque valeur de u correspondent deux séries de valeurs de z représentées par les formules

$$z + m\omega + m'\omega', \quad A - z + m\omega + m'\omega',$$

dans lesquelles m et m' désignent des nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs. Les valeurs $B - z$, $C - z$, que l'on obtiendrait en parcourant, d'abord l'un des contours (B) ou (C), puis le chemin rectiligne OM, rentrent dans la seconde série; car $B = A + B - A = A - \omega$, $C = B + C - A = A - \omega'$. Réciproquement on conclut de là que u est une fonction monodrome de z doublement périodique; quand la variable z augmente ou diminue de l'une des quantités ω et ω', la fonction u reprend la même valeur.

Fig. 13.



Dans le plan qui sert à figurer la variation de z, portons à la suite les unes des autres les longueurs oo_1, o_1o_2, o_2o_3,... (*fig.* 13), égales à

la première période ω, les longueurs oo', $o'o''$, $o''o'''$,..., égales à la seconde période ω'; par les points o, o', o'',..., menons des parallèles à oo_1, et par les points o, o_1, o_2,..., des parallèles à oo' : ces parallèles diviseront le plan en parallélogrammes égaux, dans lesquels la fonction u reprendra périodiquement la même valeur. Dans chaque parallélogramme, la fonction u passe deux fois par tous les états de grandeur, et la somme des deux valeurs de z qui correspondent à la même valeur de u est constante et égale à A, en négligeant les multiples des périodes. La fonction, dans chaque parallélogramme, admet deux zéros simples, $z = 0$, $z = A$, et un infini double $z = \frac{A}{2}$; car l'équation (2) montre que $z' = 0$ ou $z = \alpha$ est un zéro simple pour v et par conséquent un infini double pour u.

61. La méthode précédente s'applique sans difficulté à l'équation différentielle

$$(3) \qquad \frac{du}{dz} = \sqrt{G(u-a)(u-b)(u-c)(u-d)},$$

à laquelle on joint les conditions $u = 0$, $\frac{du}{dz} = U_0$, pour $z = 0$. La fonction u reste monodrome même dans le voisinage des valeurs a, b, c, d, pour lesquelles la dérivée cesse d'être monodrome par rapport à u. Soit α une valeur de z qui rend u infinie; si l'on pose

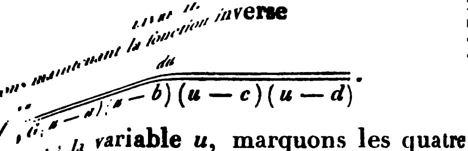
$$z = \alpha + z', \quad u = \frac{1}{v},$$

l'équation devient

$$(4) \qquad \frac{dv}{dz'} = -\sqrt{G(1-av)(1-bv)(1-cv)(1-dv)},$$

et l'on a la condition $v = 0$ pour $z' = 0$. La fonction v restant monodrome dans le voisinage de $z' = 0$, il en est de même de u. Ainsi la fonction u est monodrome dans toute l'étendue du plan.

la variable u, apr... inverse
un autr...
de si... $- b)(u - c)(u - d)$.
tial...



er... la variable u, marquons les quatre points a, b, c, d (*fig.* 14), dans l'ordre où ils se présentent quand on fait tourner le rayon vecteur dans un sens déterminé, et considérons les contours élémentaires qui enveloppent ces différents points. Comme nous l'avons expliqué plus haut, quand la variable u parcourt successivement deux contours élémentaires, on ramène à l'origine, par deux changements de signe, la valeur initiale du radical; il en résulte les six périodes

$$A - B, \quad A - C, \quad A - D,$$
$$B - C, \quad B - D, \quad C - D.$$

Mais ces six périodes ne sont pas distinctes; on remarque d'abord que les trois dernières, étant des combinaisons des trois premières, rentrent dans celles-ci. Nous allons faire voir maintenant que les trois premières périodes se réduisent à deux.

De l'origine comme centre, avec un très-grand rayon OL, décrivons un cercle, et supposons que la variable u parcoure d'abord la droite OL, puis décrive la circonférence dans le sens indiqué par la flèche, et revienne à l'origine par la droite LO. Ce contour fermé équivaut évidemment à la somme des quatre contours élémentaires $(A) + (B) + (C) + (D)$, parcourus dans l'ordre indiqué, ce qui donne l'intégrale $A - B + C - D$. Le radical, ayant éprouvé quatre changements de signe, reprend à l'origine sa valeur initiale U_0; quand la variable, après avoir parcouru la droite OL, a décrit la grande circonférence, le radical reprend au point L la même valeur, et par suite la

seconde intégrale LO détruit la première OL ; il reste à évaluer l'intégrale circulaire. Si l'on pose $z = re^{\theta i}$, cette intégrale a par expression

$$\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \frac{ie^{-\theta i}.d\theta}{r\sqrt{G\left(1-\frac{a}{r}e^{-\theta i}\right)\left(1-\frac{b}{r}e^{-\theta i}\right)\left(1-\frac{c}{r}e^{-\theta i}\right)\left(1-\frac{d}{r}e^{-\theta i}\right)}};$$

quand le rayon augmente indéfiniment, cette intégrale tend vers zéro. Comme l'intégrale relative au contour formé OLL'LO est nulle, il en résulte la relation

$$A - B + C - D = 0;$$

d'où

$$A - D = B - C = (A - C) - (A - B);$$

ce qui fait rentrer la troisième période A — D dans les deux premières. Ainsi la fonction u est doublement périodique; elle admet les deux périodes $\omega = A - B$, $\omega' = A - C$.

Si l'on néglige les multiples des périodes, on voit qu'à chaque valeur de u correspondent deux valeurs de z, savoir : l'intégrale rectiligne z et $A - z$, les autres valeurs $B - z$, $C - z$, $D - z$ rentrant dans la seconde par des additions de périodes. La somme de ces deux valeurs est constante et égale à A.

Dans chaque parallélogramme des périodes, la fonction u passe deux fois par tous les états de grandeur ; elle admet deux zéros simples $z = 0$, $z = A$, et deux infinis simples $z = \alpha$, $z = \beta$. L'équation (4) montre, en effet, que $z = \alpha$ est zéro simple pour v et, par conséquent, infini simple pour u.

62. Il résulte de ce qui précède que, lorsque le polynôme placé sous le radical est du troisième ou du quatrième degré, la fonction définie par l'équation différentielle est monodrome et doublement périodique. Il est aisé de voir que, si le polynôme était d'un degré supérieur au quatrième, la fonction u cesserait d'être monodrome.

Considérons en général l'équation

$$\frac{du}{dz} = U, \quad U^2 = F(u),$$

$F(u)$ désignant un polynôme entier du degré m, et soit α une

valeur finie de z pour laquelle u devient infinie. Si l'on pose

$$u = \frac{1}{v}, \quad U v^2 = -V,$$

l'équation différentielle devient

$$\frac{dv}{dz} = V,$$

et l'on a

$$V^2 = v^4 F\left(\frac{1}{v}\right).$$

Quand le degré m du polynôme $F(u)$ ne surpasse pas 4, le nouveau coefficient différentiel V conserve une valeur finie pour $v = 0$, et par suite, en vertu de ce qui précède, la fonction v reste monodrome quand z tourne autour de α.

Lorsque le polynôme est d'un degré supérieur à 4, le coefficient différentiel V devient infini pour $v = 0$, et la fonction v n'est plus monodrome. Supposons d'abord que le polynôme $F(u)$ soit d'un degré pair $2n$, on aura

$$V^2 = \frac{A + Bv + \ldots}{v^{2n-4}};$$

d'où l'on déduira pour V une expression de la forme

$$V = \frac{a + bv + \ldots}{v^{n-2}}.$$

En vertu du théorème II (livre II, chapitre I), quand z tourne autour du point α, la fonction v prend $n-1$ valeurs, qui se permutent les unes dans les autres circulairement.

Si le polynôme est du degré impair $m = 2n + 1$, on posera

$$v = v'^2,$$

d'où

$$V = \frac{a + bv'^2 + \ldots}{v'^{2n-3}}.$$

Le coefficient différentiel de l'équation

$$\frac{dv'}{dz'} = \frac{V}{2v'}$$

étant, par rapport à v', un infiniment grand du degré $2n-2$, la

fonction v' et par suite v admettent $2n-1$ valeurs en série circulaire, quand z tourne autour du point α.

Lorsque $m = 2$, u est une fonction de z simplement périodique, qui ne devient infinie pour aucune valeur finie de z.

Lorsque $m = 3$ ou $m = 4$, la fonction est doublement périodique et admet deux infinis dans chaque parallélogramme des périodes.

Mais lorsque m est plus grand que 4, le nombre des périodes surpasse en général deux; dans tous les cas, la fonction n'est plus monodrome et prend une infinité de valeurs en chaque point du plan.

CHAPITRE IV.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES.

Des périodes.

63. Dans le chapitre précédent, nous avons fait voir comment certaines équations différentielles donnent naissance à des fonctions monodromes et monogènes doublement périodiques. Dans le chapitre actuel, nous nous proposons de démontrer les propriétés fondamentales des fonctions doublement périodiques en général.

On conçoit directement l'existence des fonctions doublement périodiques. Que l'on suppose le plan, dans lequel se meut la variable z, divisé en parallélogrammes égaux ayant pour côtés les deux quantités géométriques ω et ω', et que l'on se représente une fonction monodrome reprenant la même valeur aux points correspondants de ces divers parallélogrammes, on aura une idée très-nette d'une fonction doublement périodique; mais en général cette fonction ne sera pas monogène.

Pour qu'il ait réellement deux périodes, il faut que le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ soit imaginaire; autrement, les deux quantités géomé-

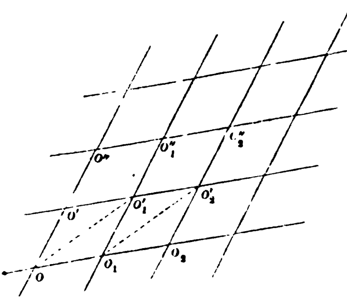
triques ω et ω' ayant la même direction, les parallélogrammes se réduiraient à des lignes droites. Il est aisé de voir que, lorsque le rapport des périodes est réel et commensurable, les deux périodes se réduisent à une seule; en effet, soit $\omega = n\omega''$, $\omega' = n'\omega''$, n et n' étant des nombres entiers premiers entre eux; on a

$$p\omega + q\omega' = (pn + qn')\omega'';$$

les combinaisons des deux périodes sont des multiples de ω'', et réciproquement, comme on peut choisir p et q de manière que $pn + qn'$ soit égal à un entier donné, ces combinaisons donneront tous les multiples de ω''; ainsi les deux périodes ω et ω' se ramènent à la seule période ω'' et la fonction est simplement périodique. Supposons le rapport des périodes réel, mais incommensurable; ce cas peut être considéré comme la limite de celui où les deux périodes admettent une commune mesure ω'', infiniment petite; la fonction, reprenant la même valeur à des distances infiniment petites ω'', serait une constante. Ainsi, dans toute fonction doublement périodique, le rapport des périodes est imaginaire.

64. On peut choisir d'une infinité de manières les périodes d'une fonction doublement périodique. Pour fixer les idées, supposons la fonction monodrome et monogène. Soit o un point quelconque du plan pour lequel la fonction a la valeur u_0 et la dérivée la valeur u'_0 (*fig.* 15); à ce point en correspondent une infinité d'autres pour lesquels la fonction et sa dérivée reprennent les mêmes valeurs u_0, u'_0. Joignons deux quelconques de ces points o et o_1; si, sur la droite oo_1, et dans l'intervalle de o à o_1, il n'y a aucun autre point, on pourra prendre la grandeur géométrique oo_1 comme une première période ω. Car, la fonction et sa dérivée

Fig. 15.



ayant chacune la même valeur en o et en o_1, si l'on fait mouvoir la variable z, à partir de ces points, suivant des lignes égales et parallèles, la fonction et sa dérivée auront constamment la même valeur aux points correspondants. Il en résulte que, sur la droite indéfinie oo_1, existent une infinité de points correspondants o, o_1, o_2,..., séparés par le même intervalle ω. Maintenant faisons mouvoir cette droite parallèlement à elle-même, jusqu'à ce qu'elle rencontre un autre point o'; dans cette seconde position, la droite contiendra une nouvelle file de points correspondants o', o'_1, o'_2,..., séparés par le même intervalle ω. Si l'on joint deux points quelconques o, o' de ces deux files parallèles, la grandeur géométrique oo' pourra servir de seconde période; il est évident que sur la droite infinie oo' se trouvent aussi une infinité de points correspondants o, o', o'',..., à la distance ω' les unes des autres; on a ainsi deux séries de files égales et parallèles.

Ces deux séries de files parallèles divisent le plan en une infinité de parallélogrammes égaux entre eux, qui ne renferment dans leur intérieur aucun des points o, o_1,... o',.... Il est clair que la fonction et sa dérivée ont respectivement la même valeur aux points homologues de ces divers parallélogrammes. Nous appellerons *parallélogramme élémentaire* l'un quelconque d'entre eux, par exemple le parallélogramme $oo_1o'_1o'$.

65. Nous avons vu que l'on peut former d'une infinité de manières le parallélogramme élémentaire. Désignons par ω et ω' certaines périodes formant un parallélogramme élémentaire. Deux périodes nouvelles ω_1 et ω'_1 étant des grandeurs géométriques allant du point o à deux points homologues, on aura

$$\omega_1 = p\omega + q\omega',$$
$$\omega'_1 = p'\omega + q'\omega'.$$

Pour que ces deux périodes ω_1 et ω'_1 puissent remplacer les deux premières, et former un nouveau parallélogramme élémentaire, il faut d'abord que p et q soient premiers entre eux, ainsi que p' et q'; il faut en outre que ω et ω' soient réciproque-

ment des combinaisons de ω_1 et ω'_1 ; ce qui exige que les nombres entiers p, q, p', q' vérifient la relation $pq' - qp' = \pm 1$.

Cette condition exprime que les deux parallélogrammes sont équivalents. En effet, soient

$$\omega = a + bi, \quad \omega' = a' + b'i';$$

l'aire du premier parallélogramme est

$$\pm(ab' - ba'),$$

celle du second

$$\pm[(pa + qa')(p'b + q'b') - (pb + qb')(p'a + q'a')]$$
$$= \pm(pq' - qp')(ab' - ba').$$

Si la condition $pq' - qp' = \pm 1$ n'était pas vérifiée, le nouveau parallélogramme serait trop grand, et se composerait de la réunion de plusieurs parallélogrammes élémentaires.

66. Soit le parallélogramme $oo_1o'_1o'$ (*fig.* 15); en conservant la première période ω, et prenant pour seconde période la droite qui joint le point o à un point quelconque o'_1 de la seconde file, on obtient un nouveau parallélogramme élémentaire $oo_1o'_2o'_1$, équivalent au premier; dans ce cas, les nouvelles périodes sont ω et $\omega' + p\omega$, ce qui ajoute à l'une des périodes un multiple quelconque de l'autre.

On peut toujours, par une série de transformations pareilles, passer des périodes ω, ω' aux périodes équivalentes ω_1, ω'_1. En effet, réduisons en fraction continue la fraction $\frac{p}{q}$ et soient

$$\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_n}{q_n}, \frac{p}{q}$$

les réduites successives; on a

$$pq_n - qp_n = \pm 1;$$

mais on a aussi

$$pq' - qp' = \pm 1.$$

On peut supposer que le signe est le même, sans quoi on changerait les signes de p' et de q', c'est-à-dire le signe de ω'. On en déduit

$$p' = p_n + pt,$$
$$q' = q_n + qt,$$

t étant un nombre entier, et, par suite,

$$\omega'_1 = p_n\,\omega + q_n\,\omega' + t\omega_1\,;$$

si de la seconde période ω'_1 on retranche un multiple $t\omega_1$ de la première, on remplacera les deux périodes ω_1 et ω'_1 par les deux périodes équivalentes

$$p\,\omega + q\,\omega'.$$
$$p_n\,\omega + q_n\,\omega',$$

On a de même

$$p_n\,q_{n-1} - q_n\,p_{n-1} = \mp 1;$$

d'ailleurs

$$p_n\,q - q_n\,p = \mp 1;\quad \text{d'où}\quad p = p_{n-1} + p_n\,t',\quad q = q_{n-1} + q_n\,t',$$

et les deux périodes précédentes deviennent

$$(p_{n-1}\,\omega + q_{n-1}\,\omega') + t'(p_n\,\omega + q_n\,\omega'),$$
$$p_n\,\omega + q_n\,\omega'.$$

Si de la première on retranche un multiple de la seconde, on les remplacera par les deux périodes équivalentes

$$p_{n-1}\,\omega + q_{n-1}\,\omega',$$
$$p_n\,\omega + q_n\,\omega'.$$

En continuant de cette manière, on arrivera aux deux périodes

$$p_0\,\omega + q_0\,\omega',$$
$$p_1\,\omega + q_1\,\omega'.$$

Mais on peut toujours supposer la fraction $\frac{p}{q}$ moindre que l'unité, sans quoi on aurait réduit en fraction continue la fraction $\frac{q}{p}$; dans ce cas, on a $p_0 = 0$, $q_0 = 1$, $p_1 = 1$, et les deux dernières périodes obtenues sont ω' et $\omega + q_1\,\omega'$; une dernière opération les ramène à ω, ω'.

Propriétés générales.

67. Les fonctions doublement périodiques, monodromes et monogènes, jouissent de propriétés communes qui résultent de l'idée même de la double périodicité. C'est M. Liouville qui, le premier, a envisagé les fonctions doublement périodiques

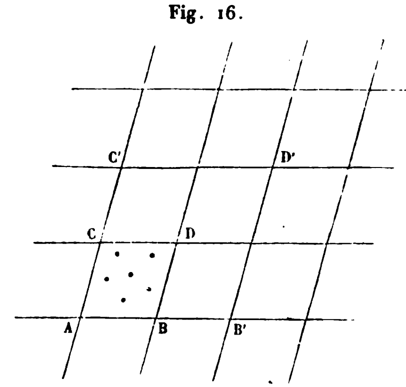
sous ce point de vue très-élevé; il a jeté ainsi un grand jour sur cette matière auparavant si obscure.

THÉORÈME I. — *Le résidu intégral de toute fonction doublement périodique, monodrome et monogène, relatif à l'aire d'un parallélogramme élémentaire, est nul.*

M. Cauchy appelle *résidu intégral* d'une fonction monodrome et monogène $f(z)$, relatif à une aire plane donnée, la valeur de l'intégrale $\int f(z)\,dz$, prise le long du contour de cette aire et divisée par $2\pi i$. D'après ce qui a été dit au n° 20, le résidu relatif à une aire quelconque est égal à la somme des résidus relatifs aux aires infiniment petites qui comprennent les points de l'aire pour lesquels la fonction $f(z)$ devient infinie.

Nous supposons la fonction $f(z)$ doublement périodique. Représentons les deux périodes par AB et AC (*fig.* 16); des parallèles équidistantes partageront le plan en parallélogrammes dans lesquels la fonction reprendra périodiquement la même valeur. Considérons le résidu intégral de la fonction $f(z)$ relatif à l'aire du parallélogramme ABDC, et l'intégrale définie prise le long du contour de ce parallélogramme, parcouru dans le sens ABDC. La fonction $f(z)$ étant la même le long des deux côtés opposés AB, CD du parallélogramme, il est évident que l'intégrale définie, prise le long de ces deux lignes, acquiert la même valeur; mais, comme les côtés opposés sont parcourus en sens contraire, les deux portions relatives à ces côtés, dans l'intégrale définie, se détruisent, et de même les deux portions relatives aux deux côtés opposés BD, CA. Ainsi l'intégrale définie, prise le long du contour du parallélogramme est nulle, et par conséquent le résidu intégral est nul.

Fig. 16.



Ce théorème remarquable, duquel on déduit avec une ·ande facilité les plus importantes propriétés des fonctions »ublement périodiques, a été aperçu pour la première fois ar M. Hermite.

68. Théorème II. — *Toute fonction doublement périodi-ue, monodrome et monogène, admet au moins deux infi-ıis dans chaque parallélogramme élémentaire.*

La fonction, étant périodique, admet un premier infini lans chaque parallélogramme. Si elle n'avait qu'un infini simple $z = \alpha$ dans un parallélogramme, elle s'écrirait

$$f(z) = \frac{A}{z - \alpha} + \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ ne devenant plus infinie dans ce parallélogramme; le résidu intégral relatif à ce parallélogramme, étant égal à A, ne serait pas nul; il y a donc au moins un second infini.

Cette propriété sert de base à la belle théorie des fonctions doublement périodiques professée par M. Liouville au Collége de France.

Si la fonction doublement périodique admet deux infinis simples, $z = \alpha$, $z = \beta$, dans un parallélogramme, on pourra la mettre sous la forme

$$f(z) = \frac{A}{z - \alpha} + \frac{B}{z - \beta} + \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ ne devenant plus infinie dans ce parallélogramme; pour que le résidu soit nul, il faut que $B = -A$. Si la fonction admet un infini double $z = \alpha$, on aura

$$f(z) = \frac{A}{(z - \alpha)^2} + \varphi(z),$$

le coefficient de la fraction du premier degré étant nul.

69. Théorème III. — *Chaque parallélogramme des périodes renferme autant de zéros que d'infinis.*

Considérons la fonction $\frac{f'(z)}{f(z)}$. Cette fonction, qui est doublement périodique, comme la fonction proposée $f(z)$, n'admet que des infinis simples, savoir les zéros et les infinis de la fonc-

tion $f(z)$. En effet, soit a un zéro de degré p de la fonction $f(z)$, on aura

$$f(z) = (z - a)^p \varphi(z),$$

la fonction $\varphi(z)$ ne devenant ni nulle ni infinie pour $z = a$; on en déduit

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{p}{z - a} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

Ainsi la quantité a est un infini simple de la fonction $\frac{f'(z)}{f(z)}$. Le résidu de cette fonction, relatif à cette valeur a, est égal à p.

De même, soit α un infini de degré q de la fonction $f(z)$, on aura

$$f(z) = (z - \alpha)^{-q} \varphi(z),$$

la fonction $\varphi(z)$ ne devenant ni nulle ni infinie pour $z = \alpha$; on en déduit

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{q}{z - \alpha} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

Ainsi la quantité α est un infini simple de la fonction $\frac{f'(z)}{f(z)}$, et le résidu correspondant est égal à $-q$.

Puisque la fonction $\frac{f'(z)}{f(z)}$ est doublement périodique, le résidu intégral de cette fonction, relatif à l'aire du parallélogramme, est nul; on a donc

$$\Sigma p - \Sigma q = 0,$$

ou

$$\Sigma p = \Sigma q.$$

On en conclut que, dans chaque parallélogramme, le nombre des zéros de la fonction $f(z)$ est égal au nombre des infinis, en tenant compte du degré de chacun d'eux.

70. Corollaire. — Désignons par n le nombre des infinis de la fonction $f(z)$ dans chaque parallélogramme, le nombre des zéros est aussi n. La fonction $f(z) - u$, qui a n infinis, a aussi n zéros; ceci montre que, dans chaque parallélogramme, la fonction $f(z)$ passe n fois par une valeur quelconque u.

Il résulte de ce qui précède que l'on peut caractériser l'ordre d'une fonction doublement périodique par le nombre de ses infinis dans chaque parallélogramme, puisque ce nombre indique combien de fois la fonction passe par chaque valeur. L'ordre est au moins égal à deux. Les fonctions doublement périodiques, provenant des équations différentielles que nous avons étudiées dans le chapitre précédent, sont du second ordre.

71. THÉORÈME IV. — *La somme des n valeurs de la variable qui, dans un même parallélogramme, correspondent à une même valeur de la fonction doublement périodique d'ordre n, est constante.*

Appelons $z_1, z_2, \ldots, z_n$, les n valeurs de z qui, dans un même parallélogramme, correspondent à la même valeur u de la fonction doublement périodique $u = f(z)$, et posons

$$\zeta = z_1 + z_2 + \ldots + z_n,$$

d'où

$$\frac{d\zeta}{du} = \frac{dz_1}{du} + \frac{dz_2}{du} + \ldots + \frac{dz_n}{du}.$$

A chaque valeur de u, finie ou infinie, correspond une valeur finie de ζ, augmentée de multiples des périodes, et une seule valeur du coefficient différentiel $\frac{d\zeta}{du}$, qui peut être regardé comme une fonction de u, monodrome et monogène. Cette fonction ne peut devenir infinie pour aucune valeur de u finie ou infinie; car, si $\frac{d\zeta}{du}$ devenait infinie pour $u = a$, on aurait, en vertu du théorème III (n° 36),

$$\frac{d\zeta}{du} = \frac{\varphi(u)}{(u-a)^p},$$

et ζ deviendrait infinie, ce qui est impossible. La fonction $\frac{d\zeta}{du}$ ne devenant pas infinie, est une constante; de plus, cette constante est nulle, sans quoi on aurait $\zeta = Au + B$. Donc la quantité ζ est elle-même une constante.

72. Théorème V. — *Il existe une fonction doublement périodique du second ordre, monodrome et monogène, ayant deux périodes données* ω *et* ω', *deux infinis donnés* α *et* β *et deux zéros donnés satisfaisant à la condition* $\alpha+\beta\equiv a+b$.

Proposons-nous d'abord de former une fonction doublement périodique du second ordre, aux deux périodes ω et ω', et admettant deux infinis donnés α et β.

Considérons la double série

$$(1)\quad f(z)=\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{1}{\cos\frac{2\pi}{\omega}\left(z-\frac{\alpha+\beta}{2}+m\omega'\right)-\cos\pi\frac{\alpha-\beta}{\omega}},$$

que l'on prolonge indéfiniment à droite et à gauche, en donnant à m toutes les valeurs entières depuis o à $+\infty$ et depuis -1 à $-\infty$.

Nous commencerons par démontrer que cette double série est convergente. Désignons par $\rho=r+si$ le rapport imaginaire des périodes $\frac{\omega'}{\omega}$, et pour fixer les idées, supposons $s>0$. En remplaçant les cosinus par des exponentielles, le terme général de la série devient

$$\frac{2}{e^{-2m\pi\rho i}.e^{-\frac{2\pi}{\omega}\left(z-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)i}+e^{2m\pi\rho i}.e^{\frac{2\pi}{\omega}\left(z-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)i}-e^{-\pi\frac{\alpha-\beta}{\omega}i}-e^{\pi\frac{\alpha-\beta}{\omega}i}}$$

Si m est positif et très-grand, on écrira ce terme sous la forme suivante :

$$\frac{2e^{2m\pi\rho i}.e^{\frac{2\pi}{\omega}\left(z-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)i}}{1+e^{2m\pi\rho i}.e^{\frac{2\pi}{\omega}\left(z-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)i}\left[e^{2m\pi\rho i}.e^{\frac{2\pi}{\omega}\left(z-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)i}-e^{\pi\frac{\alpha-\beta}{\omega}i}-e^{-\pi\frac{\alpha-\beta}{\omega}i}\right]}$$

Le module du facteur $e^{2m\pi\rho i}$, étant égal à $e^{-2m\pi s}$, est très-petit; le dénominateur est sensiblement égal à l'unité. La racine $m^{\text{ième}}$ du terme général est donc sensiblement égale à

$$e^{2\pi\rho i}.e^{\frac{2\pi}{m\omega}\left(z-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)i},$$

c'est-à-dire à $e^{2\pi\rho i}$, dont le module est $e^{-2\pi s}$. Ainsi, quand m

augmente indéfiniment, la racine $m^{ième}$ du terme général tend vers une limite dont le module est moindre que l'unité, et par conséquent la série, prolongée vers la droite, est convergente. Si m est négatif et très-grand, on changera le signe de m, et l'on arrivera à la même limite $e^{2\pi\rho i}$.

La série (1), étant convergente dans les deux sens, définit une fonction de z. Cette fonction est monodrome, puisque chaque terme n'a qu'une valeur pour chaque valeur de z. Il est aisé de voir qu'elle est doublement périodique. D'abord, chaque terme reprenant la même valeur, quand z augmente de ω, la fonction admet la première période ω. Si z augmente de ω', le premier terme devient égal au second, le second au troisième, etc., en un mot tous les termes marchent d'un rang vers la droite; puisque la série est convergente dans les deux sens, la somme ne change pas; ainsi la fonction admet la seconde période ω'.

Le premier terme, celui qui correspond à $m = 0$, devient infini pour les deux valeurs $z = \alpha$, $z = \beta$, que l'on peut augmenter d'un multiple quelconque de ω; le terme, qui correspond à $m = -1$, devient infini pour les deux valeurs $z = \alpha + \omega'$, $z = \beta + \omega'$, que l'on peut augmenter de même d'un multiple quelconque de ω, et ainsi de suite. La fonction admet donc les deux infinis $z = \alpha$, $z = \beta$.

73. Il reste maintenant à faire voir que la fonction est monogène. Nous nous servirons pour cela d'un lemme que nous allons démontrer.

Soit

$$f(z) = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$$

une fonction définie par une série convergente, dont chaque terme est une fonction monodrome et monogène de la variable z dans une certaine portion du plan; si la série

$$\varphi(z) = u'_0 + u'_1 + u'_2 + \ldots,$$

obtenue en prenant la dérivée de chaque terme, est convergente, elle définit une fonction $\varphi(z)$ qui est la dérivée de la fonction proposée $f(z)$, quelle que soit la direction du déplacement. Supposons que l'on intègre depuis a jusqu'à z, le long

d'une ligne comprise dans la portion de plan considérée, on aura

$$\int_a^z \varphi(z)\,dz = \int_a^z u'_0\,dz + \int_a^z u'_1\,dz + \ldots;$$

puisque u'_0 est la dérivée de la fonction monodrome et monogène u_0, on a

$$\int_a^z u'_0\,dz = u_0 - (u_0)_a,$$

et de même pour les autres termes; on a donc

$$\int_a^z \varphi(z)\,dz = f(z) - f(a).$$

Imaginons que z se déplace d'une quantité très-petite dans une direction quelconque, il viendra

$$\Delta . f(z) = [\varphi(z) + \varepsilon] . \Delta z;$$

d'où

$$\lim \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \varphi(z).$$

Ainsi la fonction $f(z)$ admet pour dérivée $\varphi(z)$, quelle que soit la direction du déplacement; c'est donc une fonction monogène.

Revenons maintenant à la série (1); en prenant la dérivée de chaque terme on forme la nouvelle série

$$(2)\quad \varphi(z) = \sum_{m=-\infty}^{m=-\infty} \frac{\frac{2\pi}{\omega} \cdot \sin \frac{2\pi}{\omega}\left(z - \frac{\alpha+\beta}{2} + m\omega'\right)}{\left[\cos\frac{2\pi}{\omega}\left(z - \frac{\alpha+\beta}{2} + m\omega'\right) - \cos\pi\frac{\alpha-\beta}{\omega}\right]^2},$$

convergente comme la première. Car, si m est très-grand positif, le terme général s'écrira

$$\frac{\frac{4\pi i}{\omega} \cdot e^{2m\pi\rho i} \cdot e^{\frac{2\pi}{\omega}\left(z - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)i} \cdot \left[1 - e^{4m\pi\rho i} \cdot e^{\frac{4\pi}{\omega}\left(z - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)i}\right]}{(1+\varepsilon)^2},$$

ε étant très-petit; la racine $m^{ième}$ aura pour limite $e^{2\pi\rho i}$, dont le module $e^{-2\pi s}$ est moindre que l'unité; donc la série (2) est

convergente. En vertu du principe que nous avons établi, la fonction $\varphi(z)$ qu'elle définit, est la dérivée de fonction $f(z)$, quelle que soit la direction du déplacement; ceci prouve que la fonction $f(z)$ est monogène.

74. En résumé, la série (1) définit une fonction $f(z)$ doublement périodique, monodrome et monogène, admettant les deux périodes données ω et ω', et les deux infinis donnés α et β.

La fonction

$$A[f(z)-f(a)]$$

sera aussi doublement périodique, aux mêmes périodes ω et ω'; elle admettra les mêmes infinis α et β; elle admet de plus le zéro donné a, et par suite un second zéro b, tel que $\alpha+\beta \equiv a+b$. Il y a encore un facteur A arbitraire que l'on pourra déterminer par la condition que la fonction prenne une valeur donnée pour une valeur donnée de z.

A l'aide d'une fonction doublement périodique $f(z)$ du second ordre, telle que celle que nous venons de former, il est facile d'obtenir une autre fonction doublement périodique du second ordre $\varphi(z)$, ayant les mêmes périodes ω et ω', mais d'autres infinis α', β', et d'autres zéros a', b'.

Considérons en effet l'expression

$$(3) \qquad \varphi(z) = A\frac{f(z+\theta)-f(a'+\theta)}{f(z+\theta)-f(\alpha'+\theta)};$$

le numérateur devient infini pour les deux valeurs $z=\alpha-\theta$ et $z=\beta-\theta$, dont la somme est $\alpha+\beta-2\theta$; mais, comme le dénominateur admet aussi ces deux infinis, la fraction conserve une valeur finie. Les deux valeurs $z=\alpha'$, $z=\alpha+\beta-2\theta-\alpha'$, annulant le dénominateur, rendent infinie la fraction; si donc on pose

$$\alpha+\beta-2\theta-\alpha'=\beta',$$

d'où

$$\theta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha'+\beta'}{2},$$

la fraction admettra les deux infinis simples α' et β'. Le numé-

77. Corollaire I. — Appliquons ce théorème à la recherche de la relation qui existe entre la fonction doublement périodique $u = f(z)$ et sa dérivée $u' = f'(z)$. La dérivée est une fonction doublement périodique ayant les mêmes périodes que la fonction proposée. Elle admet les mêmes infinis, le degré de chacun d'eux étant élevé d'une unité; si donc on désigne par n l'ordre de la fonction u, l'ordre n' de la fonction u' sera au moins égal à $n+1$ et au plus égal à $2n$. Ainsi la fonction u et sa dérivée u' sont liées par une équation algébrique entière, du degré n par rapport à u', et du degré n' par rapport à u.

Soit

$$(7) \qquad U_0 u'^n + U_1 u'^{n-1} + U_2 u'^{n-2} + \ldots + U_n = 0$$

cette équation ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de u'. La fonction u' ne devenant infinie pour aucune valeur finie de u, le premier coefficient U_0 est égal à l'unité. A une même valeur de u correspondent n valeurs de z dont la somme est constante (71), et, par suite, n valeurs de $\frac{dz}{du}$ ou de $\frac{1}{u'}$ dont la somme est nulle; il en résulte que l'avant-dernier coefficient U_{n-1} est égal à zéro.

Cette liaison algébrique entre une fonction doublement périodique quelconque et sa dérivée a été remarquée par M. Méray, élève de l'École Normale.

78. Corollaire II. — Les fonctions doublement périodiques les plus simples sont celles du second ordre. Dans ce cas l'équation (7) se réduit à

$$(8) \qquad u'^2 + U_2 = 0,$$

U_2 étant un polynôme en n du troisième ou du quatrième degré. Ainsi toute fonction doublement périodique du second ordre satisfait à une équation différentielle du genre de celles que nous avons étudiées dans le chapitre précédent.

Il y a deux cas à distinguer: 1°. Lorsque la fonction $u = f(z)$ a deux infinis simples α et β, dont nous désignerons la somme par s, la dérivée u', ayant deux infinis doubles, est une fonc-

tion doublement périodique du quatrième ordre, et le polynôme U_2 est du quatrième degré. Il est facile de former ce polynôme ; la fonction u reprenant la même valeur dans chaque parallélogramme pour deux valeurs de z, dont la somme est égale à la quantité s augmentée de multiples des périodes, on a

$$f(z) = f(s-z),$$

et, par suite,

$$f'(z) = -f'(s-z).$$

Si l'on fait $z = \frac{s}{2}$, il vient

$$f'\left(\frac{s}{2}\right) = -f'\left(\frac{s}{2}\right),$$

ce qui ne peut avoir lieu que si $f'\left(\frac{s}{2}\right)$ est nulle ou infinie ; mais $f'\left(\frac{s}{2}\right)$ n'est pas infinie, puisque $\frac{s}{2}$ diffère des deux infinis α et β ; donc $f'\left(\frac{s}{2}\right) = 0$. Si l'on remplace z par chacune des valeurs $\frac{s}{2} + \frac{\omega}{2}, \frac{s}{2} + \frac{\omega'}{2}, \frac{s}{2} + \frac{\omega + \omega'}{2}$, on a de même

$$f'\left(\frac{s}{2} + \frac{\omega}{2}\right) = -f'\left(\frac{s}{2} - \frac{\omega}{2}\right) = -f'\left(\frac{s}{2} + \frac{\omega}{2}\right) = 0,$$

$$f'\left(\frac{s}{2} + \frac{\omega'}{2}\right) = -f'\left(\frac{s}{2} - \frac{\omega'}{2}\right) = -f'\left(\frac{s}{2} + \frac{\omega'}{2}\right) = 0,$$

$$f'\left(\frac{s}{2} + \frac{\omega + \omega'}{2}\right) = -f'\left(\frac{s}{2} - \frac{\omega + \omega'}{2}\right) = -f'\left(\frac{s}{2} + \frac{\omega + \omega'}{2}\right) = 0.$$

Ainsi la fonction u' admet les quatre zéros $\frac{s}{2}$, $\frac{s}{2} + \frac{\omega}{2}$, $\frac{s}{2} + \frac{\omega'}{2}$, $\frac{s}{2} + \frac{\omega + \omega'}{2}$. On a donc

$$u'^2 = A\left[u - f\left(\frac{s}{2}\right)\right]\left[u - f\left(\frac{s}{2} + \frac{\omega}{2}\right)\right]\left[u - f\left(\frac{s}{2} + \frac{\omega'}{2}\right)\right]\left[u - f\left(\frac{s}{2} + \frac{\omega + \omega'}{2}\right)\right].$$

2°. Lorsque la fonction u admet un infini double α, la dérivée u', ayant un infini triple, est du troisième ordre, et le polynôme U_2 du troisième degré. La somme constante s étant égale

à 2α, la fonction u' admet les trois zéros $\alpha+\frac{\omega}{2}$, $\alpha+\frac{\omega'}{2}$, $\alpha+\frac{\omega+\omega'}{2}$, et l'on a

$$(10)\quad u'^2 = A\left[u-f\left(\alpha+\frac{\omega}{2}\right)\right]\left[u-f\left(\alpha+\frac{\omega'}{2}\right)\right]\left[u-f\left(\alpha+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)\right].$$

Chacun des facteurs qui composent les expressions (9) et (10) admet un zéro double.

78. Théorème VIII. — *Une fonction doublement périodique, de l'ordre n, s'exprime rationnellement au moyen d'une fonction du second ordre aux mêmes périodes, et de sa dérivée.*

Proposons-nous maintenant d'exprimer une fonction doublement périodique v, de l'ordre n, au moyen d'une fonction doublement périodique u du second ordre, à deux infinis simples α et β, et aux mêmes périodes. Les deux fonctions sont liées par une équation

$$(11)\qquad Lv^2 - 2Mv + P = 0,$$

du second degré par rapport à v et du degré n par rapport à u.

Si l'on pose

$$v = \frac{M+w}{L},$$

cette équation devient

$$(12)\qquad w^2 - (M^2 - LP) = 0.$$

La fonction w est une fonction monodrome doublement périodique par rapport à z, comme la fonction u. A chaque valeur de u correspondent, dans un même parallélogramme, deux valeurs z_1 et z_2 de z, lesquelles donnent pour u' deux valeurs égales et de signes contraires, et de même pour w. Ainsi le quotient $\frac{w}{u'}$ est monodrome par rapport à u. Nous avons vu que la fonction u' admet les quatre zéros $\frac{s}{2}$, $\frac{s}{2}+\frac{\omega}{2}$, $\frac{s}{2}+\frac{\omega'}{2}$, $\frac{s}{2}+\frac{\omega+\omega'}{2}$; la fonction w admet aussi ces quatre zéros. D'un autre côté, l'équation (12) ayant son premier coefficient égal à l'unité, la

fonction w ne devient infinie pour aucune valeur finie de u. Le quotient $\frac{w}{u'}$, monodrome par rapport à u et ne devenant infini pour aucune valeur finie de u, est donc une fonction entière de u (n° 40); cette fonction est du degré $n-2$. Si nous la désignons par N, nous aurons la formule

$$v=\frac{\mathrm{M}+\mathrm{N}u'}{\mathrm{L}}, \tag{13}$$

dans laquelle L, M, N représentent des polynômes entiers en u; les deux premiers du degré n au plus, le troisième du degré $n-2$.

Cette proposition très-importante est due à M. Liouville, qui l'a démontrée par d'autres considérations.

79. *Remarques.*—Le dénominateur L de l'expression (13) est en général du degré n; il sera nul pour n valeurs de u, et, par suite, pour $2n$ valeurs de z dans chaque parallélogramme. Parmi ces $2n$ zéros du dénominateur, n sont les infinis de la fonction v, n annulent aussi le numérateur, et par conséquent se détruisent. Le numérateur admet aussi $2n$ zéros, savoir les n dont nous venons de parler et qui lui sont communs avec le dénominateur, et, en outre, les n zéros de la fonction v.

Si n est pair, et que, de plus, les infinis de la fonction v, groupés deux à deux d'une manière convenable, présentent une somme constante et égale à la somme s des deux infinis de la fonction u, il est clair que le dénominateur L se réduira au degré $\frac{n}{2}$; car les deux zéros de chacun des facteurs du dénominateur seront des infinis de la fonction v.

80. Désignons par $f(z)$ la fonction u et par $\mathrm{F}(z)$ la fonction v. Nous savons que

$$f(s-z)=f(z),$$

d'où

$$f'(s-z)=-f'(z).$$

Si, dans l'expression

$$\mathrm{F}(z)=\frac{\mathrm{M}+\mathrm{N}f'(z)}{\mathrm{L}},$$

on remplace z par $s - z$, il vient

$$F(s-z) = \frac{M - Nf'(z)}{L}.$$

Supposons que la fonction $F(z)$ jouisse de la même propriété que la fonction $f(z)$, c'est-à-dire que $F(s-z) = F(z)$, la comparaison des équations précédentes montre que $N = 0$; dans ce cas, on a

$$F(z) = \frac{M}{L},$$

et la fonction v est rationnelle en u.

Supposons au contraire $F(s-z) = -F(z)$; dans ce cas, on a $M = 0$, et

$$F(z) = \frac{Nf'(z)}{L}.$$

Ces dernières remarques ont été faites par M. Liouville.

81. THÉORÈME IX. — *Lorsqu'une fonction monodrome et monogène a ses infinis et ses zéros disposés par groupes égaux et équidistants suivant deux directions différentes, et que, dans chaque groupe, le nombre des zéros est le même que celui des infinis, et la somme des zéros la même que celle des infinis, la fonction est doublement périodique.*

Nous avons fait voir (n° 75) comment, avec une fonction monodrome doublement périodique $f(z)$ à deux infinis, on peut former une fonction doublement périodique $F(z)$, ayant les mêmes périodes, un nombre quelconque d'infinis et un pareil nombre de zéros donnés, pourvu que la somme des zéros égale celle des infinis.

Il existe donc une fonction doublement périodique $F(z)$ ayant les infinis et les zéros de la fonction proposée; le rapport de ces deux fonctions étant constant, on en conclut que la fonction proposée est elle-même doublement périodique.

LIVRE III.

DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

DE LA FONCTION λ.

82. Dans le livre précédent, nous avons indiqué une méthode pour étudier les fonctions définies par les équations différentielles; en appliquant cette méthode, nous avons vu que l'équation différentielle

$$\frac{du}{dz} = \sqrt{G(u-a)(u-b)(u-c)(u-d)}$$

engendre une fonction monodrome doublement périodique du second ordre.

On donne le nom de *fonction elliptique* à la fonction définie par l'équation différentielle

$$\frac{du}{dz} = g\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)},$$

dans laquelle g et k sont deux paramètres arbitraires. On suppose que pour $z = 0$ la fonction a la valeur initiale $u = 0$, et le radical la valeur $+1$. Nous désignerons par la lettre λ la fonction monodrome doublement périodique du second ordre définie par cette équation, et, pour abréger, nous représenterons le radical par Δu.

83. La forme particulière du polynôme du quatrième degré placé sous le radical donne à la fonction elliptique certaines propriétés remarquables que nous allons énumérer.

On voit d'abord que la fonction λ est impaire; car si l'on

fait varier u dans deux directions opposées, l'intégrale définie

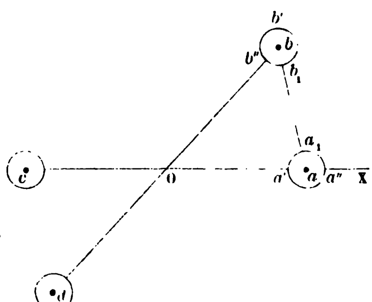
$$z = \int_0^u \frac{du}{g \Delta u}$$

acquiert des valeurs égales et de signes contraires ; on a donc

(1) $$\lambda(-z) = -\lambda(z).$$

84. Les quatre racines du polynôme placé sous le radical sont $+1, -1, +\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}$; à ces racines correspondent les quatre points a, b, c, d (*fig.* 17). Les deux périodes sont $\omega = A - C$ et $\omega' = B - A$.

Fig. 17.



Puisque $C = -A$, on a

$$\omega = 2A = 4\int_0^1 \frac{du}{g \Delta u},$$

cette intégrale étant prise suivant le chemin rectiligne Oa.

Pour évaluer la seconde période $\omega' = B - A$, il faut parcourir successivement les deux contours $(B) + (A)$. Ce double contour équivaut en signe contraire au contour fermé

$$O a' a'' a_1 b_1 b' b'' b_1 a_1 a' O\,;$$

à cause des deux changements de signe, le radical reprend en a' la même valeur, de sorte que les deux portions rectilignes $O a'$ et $a' O$ se détruisent; l'intégrale se réduit à la droite $a_1 b_1$, parcourue dans un sens et dans l'autre avec des signes contraires ; on a donc

$$\omega' = -2\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{du}{g \Delta u},$$

cette intégrale étant prise suivant le chemin rectiligne ab.

85. Les deux valeurs de z qui, dans chaque parallélogramme, correspondent à une même valeur de u sont, abstraction faite des périodes, z et $A - z$, ou $\frac{\omega}{2} - z$, dont la somme est con-

stante et égale à $\frac{\omega}{2}$. On en déduit cette relation

$$\lambda\left(\frac{\omega}{2}-z\right)=\lambda(z),$$

et, par suite,

$$(2)\qquad \lambda\left(\frac{\omega}{2}+z\right)=-\lambda(z).$$

La fonction admet les deux zéros simples $z=0$, $z=\frac{\omega}{2}$. On a aussi $\lambda\left(\frac{\omega}{4}\right)=1$, puisqu'en faisant varier u de 0 à 1 en ligne droite, l'intégrale définie z acquiert la valeur $\frac{\omega}{4}$. On voit par là que, relativement à la première période ω, la fonction $\lambda(z)$ jouit de propriétés analogues à celles de la fonction simplement périodique $\sin\frac{2\pi z}{\omega}$.

86. Cherchons maintenant les deux infinis. Supposons que la variable u, partant de $u=0$, s'éloigne à l'infini suivant un chemin quelconque, on obtiendra une valeur finie de z,

$$\alpha=\int_0^\infty \frac{du}{g\,\Delta u}.$$

Posons

$$u^2=\frac{1-u'^2}{1-k^2u'^2};$$

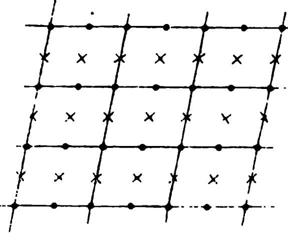
il vient

$$\alpha=-\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{du'}{g\,\Delta u'}.$$

Or, rien n'empêche de supposer le chemin suivi par la variable u tel que le chemin correspondant suivi par la variable u' soit rectiligne; on a donc $\alpha=\frac{\omega'}{2}$. Un second chemin allant de $u=0$ à $u=\infty$ donnera $\frac{\omega}{2}-\alpha$, c'est-à-dire $\frac{\omega}{2}-\frac{\omega'}{2}$ ou $\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}$. Les autres chemins conduisent aux mêmes valeurs,

augmentées ou diminuées de multiples des périodes. Ainsi, dans chaque parallélogramme, la fonction $\lambda(z)$ admet les deux infinis simples

Fig. 18.



$$z = \frac{\omega'}{2}, \quad z = \frac{\omega + \omega'}{2}.$$

La figure (18) indique la distribution des zéros et des infinis dans le plan relatif à la variable z; les points ronds se rapportent aux zéros, les étoiles aux infinis.

87. Posons

$$z = \frac{\omega'}{2} + z', \quad u = \frac{1}{kv},$$

la nouvelle fonction v satisfait à l'équation différentielle

$$(2) \qquad \frac{dv}{dz'} = -g\sqrt{(1 - v^2)(1 - k^2v^2)},$$

et s'évanouit pour $z' = 0$, la valeur initiale du radical pour $z' = 0$ étant ∓ 1. On a donc

$$v = \pm\lambda(z'),$$

suivant le signe du radical, ce qui donne la relation

$$\lambda\left(\frac{\omega'}{2} + z'\right) = \pm\frac{1}{k\lambda(z')}.$$

Si dans cette relation on fait

$$z = \frac{\omega}{4},$$

il vient

$$\lambda\left(\frac{\omega'}{2} + \frac{\omega}{4}\right) = \pm\frac{1}{k}.$$

Il est facile de déterminer le signe; on sait qu'à la valeur $u = \frac{1}{k}$, par l'intégration rectiligne suivant Ob, correspond la valeur $z = \frac{B}{2} = \frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}$, on a donc

$$\lambda\left(\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}\right) = \frac{1}{k};$$

ce qui nous apprend que dans l'équation (2) le radical a la valeur initiale -1, et par suite la dérivée $\frac{dv}{dz'}$ la valeur initiale $+1$. On en conclut la relation importante

$$(3) \qquad \lambda\left(\frac{\omega'}{2}+z\right)=\frac{1}{k\lambda(z)},$$

qui n'a pas son analogue dans le sinus, mais dans la tangente.

88. En résumant ce qui précède, on voit que la fonction elliptique, définie par l'équation (1), est une fonction monodrome doublement périodique impaire, ayant pour périodes

$$\omega=4\int_0^1\frac{du}{g\,\Delta u},\quad \omega'=-2\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{du}{g\,\Delta u}.$$

Elle admet dans chaque parallélogramme deux zéros $z=0$, $z=\frac{\omega}{2}$, et deux infinis simples $z=\frac{\omega'}{2}$, $z=\frac{\omega+\omega'}{2}$; elle passe deux fois par chaque valeur, et les deux valeurs de z, qui correspondent à une même valeur de la fonction, présentent une somme constante et égale à $\frac{\omega}{2}$. Elle jouit des propriétés suivantes :

$$\lambda\left(\frac{\omega}{2}+z\right)=-\lambda(z),\quad \lambda\left(\frac{\omega'}{2}+z\right)=\frac{1}{k\lambda(z)}.$$

On a d'ailleurs

$$\lambda\left(\frac{\omega}{4}\right)=1,\quad \lambda\left(\frac{\omega}{4}+\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{1}{k}.$$

89. On peut obtenir ces résultats d'une autre manière. Désignons par ω et ω', non plus les deux périodes considérées précédemment, mais deux périodes formant un parallélogramme élémentaire quelconque. Si dans l'équation

$$\lambda(z)=-\lambda(-z),$$

on remplace la variable par l'une des valeurs 0, $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega'}{2}$, $\frac{\omega+\omega'}{2}$, on a

$$\lambda(0)=-\lambda(0),\quad \lambda\left(\frac{\omega}{2}\right)=-\lambda\left(\frac{\omega}{2}\right),\quad \lambda\left(\frac{\omega'}{2}\right)=-\lambda\left(\frac{\omega'}{2}\right),$$
$$\lambda\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=-\lambda\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right),$$

ce qui montre que ces quatre valeurs rendent la fonction λ nulle ou infinie. Comme la fonction s'évanouit avec la variable, $z = 0$ sera un premier zéro; nous pouvons admettre que le second zéro est $\frac{\omega}{2}$, ce qui revient à appeler première période le double du second zéro; car si le second zéro était $\frac{\omega + \omega'}{2}$, rien n'empêcherait de changer de périodes, et de prendre pour périodes nouvelles $\omega_1 = \omega + \omega'$, $\omega'_1 = \omega'$. Les deux infinis seront alors $\frac{\omega'}{2}$ et $\frac{\omega + \omega'}{2}$.

La somme constante des deux valeurs de z qui, dans un même parallélogramme, correspondent à une même valeur de la fonction, étant ici $\frac{\omega}{2}$, on a

$$\lambda\left(\frac{\omega}{2} - z\right) = \lambda(z).$$

On en déduit

$$\lambda'\left(\frac{\omega}{2} - z\right) = -\lambda'(z),$$

et, par suite,

$$\lambda'\left(\frac{\omega}{4}\right) = -\lambda'\left(\frac{\omega}{4}\right), \quad \lambda'\left(\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}\right) = -\lambda'\left(\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}\right).$$

La fonction paire $\lambda'(z)$ admet donc les quatre zéros $\pm \frac{\omega}{4}$, $\pm\left(\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}\right)$. Mais on voit sur l'équation différentielle (1) que la dérivée s'annule quand la fonction λ est égale à ± 1 ou à $\pm \frac{1}{k}$. On peut toujours supposer

$$\lambda\left(\frac{\omega}{4}\right) = 1, \quad \lambda\left(\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}\right) = \frac{1}{k};$$

car, si l'on avait, au contraire,

$$\lambda\left(\frac{\omega}{4}\right) = \frac{1}{k}, \quad \lambda\left(\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}\right) = 1,$$

il suffirait de changer les périodes et de prendre pour périodes

nouvelles $\omega_1 = \omega + 2\omega'$, $\omega'_1 = \omega'$, ce qui ne changerait rien d'ailleurs à la disposition des zéros et des infinis.

Les infinis de la fonction $\lambda(z)$ étant respectivement égaux aux zéros, augmentés de la quantité constante $\frac{\omega'}{2}$, on voit que les valeurs de z, qui rendent la fonction $\lambda\left(\frac{\omega'}{2}+z\right)$ infinie, sont celles qui annulent $\lambda(z)$, et réciproquement. Les deux fonctions $\lambda\left(\frac{\omega'}{2}+z\right)$, $\frac{1}{\lambda(z)}$, ayant les mêmes zéros et les mêmes infinis, sont dans un rapport constant; on a donc

$$\lambda\left(\frac{\omega'}{2}+z\right) = \frac{A}{\lambda(z)}.$$

Si l'on fait $z = \frac{\omega}{4}$, il vient $A = \frac{1}{k}$, et l'on obtient ainsi la relation

$$\lambda\left(\frac{\omega'}{2}+z\right) = \frac{1}{k\lambda(z)}.$$

90. Il importe de remarquer la manière dont on a choisi les périodes de la fonction elliptique $\lambda(z)$. On n'a pas pris un parallélogramme élémentaire quelconque, mais un parallélogramme tel que l'on ait

$$\lambda\left(\frac{\omega}{4}\right) = 1, \quad \lambda\left(\frac{\omega}{4}+\frac{\omega'}{2}\right) = \frac{1}{k}.$$

Les propriétés que nous avons démontrées se rapportent à ce système particulier de périodes, auxquelles nous donnerons, pour les distinguer des autres, le nom de *périodes elliptiques*. Toutefois, à une même fonction $\lambda(z)$ correspondent une infinité de systèmes de périodes elliptiques données par les formules

$$\omega_1 = (4m+1)\omega + 4n\omega',$$
$$\omega'_1 = 2m'\omega + (2n'+1)\omega',$$

dans lesquelles m, n, m', n' désignent des nombres entiers assujettis à la relation

$$(4m+1)(2n'+1) - 8nm' = \pm 1,$$

relation que l'on peut mettre sous la forme

$$(4m+1)n' - 4nm' + \frac{4m+1 \mp 1}{2} = 0.$$

On peut prendre à volonté les deux nombres m et n, pourvu que les deux nombres $4m+1$ et n soient premiers entre eux; l'équation précédente indéterminée admettra une infinité de solutions entières des inconnues m' et n'.

Le signe de la première période ω est déterminé par la condition $\lambda\left(\frac{\omega}{4}\right) = +1$, mais celui de la seconde période ω' reste arbitraire.

91. L'équation (1), par laquelle nous avons défini la fonction λ, renferme deux paramètres arbitraires g et k, et l'on conçoit que les deux périodes ω et ω', qui s'en déduisent, puissent recevoir toutes les valeurs possibles; nous désignerons cette fonction par le signe $\lambda(z, g, k)$, indiquant ainsi les deux paramètres g et k, dont elle dépend.

Mais on peut ramener la question au cas où $g=1$; l'équation différentielle

$$(3) \qquad \frac{du}{dz} = \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}$$

ne renferme plus alors qu'un seul paramètre k, auquel on donne le nom de *module ;* la fonction elliptique qu'elle définit sera représentée par le symbole $\lambda(z, 1, k)$, ou plus simplement $\lambda(z, k)$, en sous-entendant le premier paramètre qui est égal à l'unité. L'équation (1) pouvant se mettre sous la forme

$$\frac{du}{d(gz)} = \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)},$$

on voit que

$$(4) \qquad \lambda(z, g, k) = \lambda(gz, k).$$

Si l'on appelle ω et ω' les deux périodes de la fonction $\lambda(z, k)$, celles de la fonction $\lambda(gz, k)$ seront $\frac{\omega}{g}$ et $\frac{\omega'}{g}$: ainsi quand on change la valeur du paramètre g, les deux périodes

varient dans le même rapport. Il résulte de là que la valeur du module k ne dépend que du rapport des périodes; après avoir déterminé ce module de manière que le rapport des périodes de la fonction $\lambda\,(z,\,k)$ ait une valeur donnée, il sera facile ensuite de choisir le paramètre g de manière que la fonction $\lambda\,(gz,\,k)$ admette deux périodes données.

Autre définition de la fonction λ.

92. D'après ce que nous avons dit dans le chapitre IV du livre II sur l'existence des fonctions doublement périodiques, on peut concevoir la fonction elliptique $\lambda(z)$, non plus comme définie par une équation différentielle, mais comme une fonction monodrome et monogène doublement périodique du second ordre jouissant de propriétés particulières. Nous savons (n° 72) qu'il existe une fonction doublement périodique du second ordre ayant deux périodes données, deux zéros et deux infinis donnés, pourvu que la somme des infinis égale celle des zéros; nous savons aussi que cette fonction est complétement déterminée à un facteur constant près. Que l'on imagine une fonction $f(z)$ du second ordre aux deux périodes ω et ω', admettant les deux zéros o et $\frac{\omega}{2}$, les deux infinis $\frac{\omega'}{2}$ et $\frac{\omega+\omega'}{2}$, et devenant égale à l'unité pour $z=\frac{\omega}{4}$ (ce qui détermine le facteur constant); cette fonction sera la fonction elliptique λ.

Nous remarquons d'abord que cette fonction est impaire; car les deux fonctions $f(z)$, $f(-z)$, ayant les mêmes zéros et les mêmes infinis, sont dans un rapport constant; on a donc

$$f(-z)=\mathrm{C}f(z),$$

ou

$$\frac{f(-z)}{-z}=-\mathrm{C}\,\frac{f(z)}{z};$$

si l'on fait tendre z vers zéro, il vient

$$f'(0)=-\mathrm{C}f'(0),$$

d'où

$$\mathrm{C}=-1,$$

et, par suite,

$$f(-z) = -f(z).$$

Il en résulte

$$f\left(\frac{\omega}{2} + z\right) = -f(z).$$

93. Il est aisé de voir ensuite qu'une pareille fonction satisfait bien à l'équation différentielle qui nous a servi à définir la fonction λ. Nous avons démontré en effet (n° 77) que toute fonction doublement périodique, monodrome et monogène du second ordre, vérifie l'équation différentielle

$$u'^2 = \mathrm{B}\left[f(z) - f\left(\frac{s}{2}\right)\right]\left[f(z) - f\left(\frac{s}{2} + \frac{\omega}{2}\right)\right]$$
$$\times\left[f(z) - f\left(\frac{s}{2} + \frac{\omega'}{2}\right)\right]\left[f(z) - f\left(\frac{s}{2} + \frac{\omega + \omega'}{2}\right)\right].$$

Ici, la somme s étant égale à $\frac{\omega}{2}$ et la fonction impaire, on a

$$f\left(\frac{s}{2}\right) = f\left(\frac{\omega}{4}\right) = 1, \quad f\left(\frac{s}{2} + \frac{\omega}{2}\right) = f\left(-\frac{\omega}{4}\right) = -1;$$

si l'on pose

$$f\left(\frac{s}{2} + \frac{\omega'}{2}\right) = f\left(\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}\right) = \frac{1}{k},$$

il vient

$$f\left(\frac{s}{2} + \frac{\omega + \omega'}{2}\right) = -\frac{1}{k},$$

et l'équation différentielle se réduit à la forme

$$u'^2 = g(1 - u^2)(1 - k^2 u^2).$$

CHAPITRE II

DE LA FONCTION μ.

94. De la fonction λ on déduit quelques autres fonctions doublement périodiques du second ordre. L'une, que nous

désignerons par la lettre μ, est donnée par l'équation finie

(1) $$\mu(z) = \sqrt{1-\lambda^2(z)},$$

à laquelle on joint la condition initiale $\mu(0) = 1$.

La fonction μ n'est pas monodrome par rapport à λ, mais elle l'est par rapport à z. En effet, c'est dans le voisinage des valeurs $z = \pm\frac{\omega}{4}$, pour lesquelles $\lambda = \pm 1$, qu'elle pourrait acquérir des valeurs multiples; posons

$$z = \frac{\omega}{4} + z',$$

nous aurons, en développant en série convergente pour les valeurs suffisamment petites de z',

$$\lambda\left(\frac{\omega}{4} + z'\right) = 1 + az'^2 + bz'^4 + \ldots;$$

la série ne contient que des puissances paires de z', puisque

$$\lambda\left(\frac{\omega}{4} + z'\right) = \lambda\left(\frac{\omega}{4} - z'\right);$$

il en résulte, en substituant, un résultat de la forme

$$\mu\left(\frac{\omega}{4} + z'\right) = z'\sqrt{A + Bz'^2 + \ldots};$$

donc la fonction $\mu(z)$ reste monodrome dans le voisinage de $z = \frac{\omega}{4}$. Il en est de même dans le voisinage de la valeur $z = -\frac{\omega}{4}$.

La fonction pourrait encore cesser d'être monodrome, quand λ devient infinie, ce qui a lieu pour $z = \frac{\omega'}{2}$ ou $z = \frac{\omega + \omega'}{2}$. Posons

$$z = \frac{\omega'}{2} + z';$$

il vient

$$\lambda\left(\frac{\omega'}{2} + z'\right) = \frac{1}{k\lambda(z')}, \quad \mu\left(\frac{\omega'}{2} + z'\right) = \frac{\sqrt{-1 + k^2\lambda^2(z')}}{k\lambda(z')};$$

la fonction μ devient infinie pour $z = \frac{\omega'}{2}$; mais elle reste monodrome autour de ce point. Il résulte de là que la fonction μ est monodrome pour toutes les valeurs de la variable z.

95. La fonction μ est paire. En effet, si l'on fait marcher z, à partir de l'origine, suivant deux lignes opposées, la fonction $\mu(z)$ prendra aux points correspondants z et $-z$, deux valeurs égales, ou deux valeurs égales et de signes contraires; quand z parcourt un premier élément de part et d'autre de l'origine, les deux valeurs de $\mu(z)$, différant très-peu de $\mu(0)$ ou de $+1$, seront de même signe, et par conséquent rigoureusement égales; il en sera de même tout le long des deux courbes. A la vérité, le raisonnement serait en défaut si les courbes passaient par les points $z = \pm\frac{\omega}{4}$, pour lesquels $\mu(z) = 0$; mais on pourra toujours éviter ces points, et, comme la fonction est monodrome, la conclusion est générale. On a donc la relation

$$\mu(-z) = \mu(z). \tag{2}$$

96. Cherchons les périodes de cette fonction : nous avons trouvé

$$\mu\left(\frac{\omega}{4} + z'\right) = z'\sqrt{A + Bz'^2 + \ldots};$$

donc

$$\mu\left(\frac{\omega}{4} + z'\right) = -\mu\left(\frac{\omega}{4} - z'\right),$$

ce qui donne la relation

$$\mu\left(\frac{\omega}{2} + z\right) = -\mu(-z) = -\mu(z). \tag{3}$$

En ajoutant $\frac{\omega}{2}$ une seconde fois, on aura

$$\mu(\omega + z) = \mu(z);$$

ω est une première période.

Nous avons trouvé d'autre part

$$\mu\left(\frac{\omega'}{2} + z'\right) = \frac{\sqrt{-1 + k^2\lambda^2(z')}}{k\lambda(z')};$$

en résulte

$$\mu\left(\frac{\omega'}{2}+z'\right)=-\mu\left(\frac{\omega'}{2}-z'\right),$$

1

$$\mu(\omega'+z)=-\mu(z); \tag{4}$$

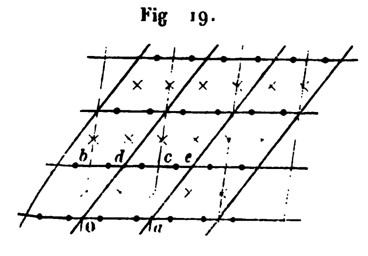
e sorte que ω' n'est pas ici la seconde période, comme pour ı fonction λ. Mais, si l'on ajoute $\frac{\omega}{2}$, on a

$$\mu\left(\frac{\omega}{2}+\omega'+z\right)=-\mu\left(\frac{\omega}{2}+z\right)=\mu(z);$$

a seconde période est $\frac{\omega}{2}+\omega'$.

L'aire du parallélogramme construit sur les deux périodes ɔ, $\frac{\omega}{2}+\omega'$ de la fonction μ est égale à celle du parallélogramme construit sur les deux périodes ω et ω' de la fonction λ. En effet, portons, à partir de l'origine, deux quantités géométriques Oa, Ob égales respectivement aux deux périodes ω, ω', le parallélogramme relatif à la fonction λ sera Oacb (*fig.* 19). La quantité $\omega'+\frac{\omega}{2}$ est figurée par la droite od qui va de l'origine au milieu d de bc, de sorte que le parallélogramme relatif à la fonction μ est Oacd. Ces deux parallélogrammes ont leurs aires égales. Ainsi les périodes de la fonction μ partagent le plan en parties de même grandeur que celles de la fonction λ, mais d'une manière différente. Si l'on avait pris $2\omega'$ pour seconde période de la fonction μ, on aurait eu un parallélogramme deux fois trop grand.

Fig 19.



97. La fonction μ admet deux zéros et deux infinis dans chaque parallélogramme. Les deux zéros sont

$$z=\frac{\omega}{4},\quad z=-\frac{\omega}{4};$$

les deux infinis sont ceux de la fonction $\lambda(z)$, savoir

$$z = \frac{\omega'}{2}, \quad z = \frac{\omega + \omega'}{2};$$

mais ce dernier, par la soustraction d'une période $\frac{\omega}{2} + \omega'$, peut s'écrire $z = -\frac{\omega'}{2}$.

Nous avons indiqué sur la figure les zéros de la fonction μ par des points ronds, les infinis par des petites croix. Les deux périodes ω et $\frac{\omega}{2} + \omega'$ constituent un parallélogramme élémentaire, puisque ce parallélogramme ne renferme que deux infinis et deux zéros. En résumé la fonction μ, définie par l'équation (1), est une fonction monodrome paire doublement périodique du second ordre; elle jouit de propriétés analogues à celles de la fonction $\cos\frac{2\pi z}{\omega}$, relativement à la première période ω.

Comme on a $\mu(-z) = \mu(z)$, la somme des deux valeurs de z qui, dans chaque parallélogramme, donnent la même valeur de la fonction est constante et égale à zéro, en négligeant les multiples des périodes.

CHAPITRE III.

DE LA FONCTION ν.

98. Parmi les fonctions doublement périodiques du second ordre que l'on déduit de la fonction λ, nous remarquerons encore la suivante, que nous désignerons par la lettre ν; elle est donnée par l'équation finie

$$(1) \qquad \nu(z) = \sqrt{1 - k^2\lambda^2(z)},$$

à laquelle on joint la condition initiale $\nu(0) = 1$.

La fonction ν pourrait acquérir des valeurs multiples dans le voisinage des valeurs $z = \pm\left(\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}\right)$, pour lesquelles

'voir $\lambda = \pm \frac{1}{k}$. Posons

$$z = \frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2} + z',$$

nous aurons

$$\lambda\left(\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2} + z\right) = \frac{1}{k\lambda\left(\frac{\omega}{4} + z'\right)} = \frac{1}{k(1 + az'^2 + bz'^4 + \ldots)};$$

on en déduit un résultat de la forme

$$\nu\left(\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2} + z'\right) = z'\sqrt{A + Bz'^2 + \ldots};$$

ainsi la fonction ν reste monodrome. On a de même

$$\nu\left(\frac{\omega'}{2} + z'\right) = \frac{\sqrt{-1 + \lambda^2(z')}}{\lambda(z')},$$

ce qui montre que la fonction ν reste monodrome dans le voisinage des valeurs de z qui rendent λ infinie. Ainsi la fonction ν est monodrome pour toutes les valeurs de la variable z.

99. Il est évident que cette fonction est paire, et l'on a

(2) $$\nu(-z) = \nu(z).$$

De ce qui précède on déduit, d'une part,

$$\nu\left(\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2} + z'\right) = -\nu\left(\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2} - z'\right),$$

ou

(3) $$\nu\left(\frac{\omega}{2} + \omega' + z\right) = -\nu(-z) = -\nu(z);$$

d'autre part,

$$\nu\left(\frac{\omega'}{2} + z'\right) = -\nu\left(\frac{\omega'}{2} - z'\right),$$

ou

(4) $$\nu(\omega' + z) = -\nu(z).$$

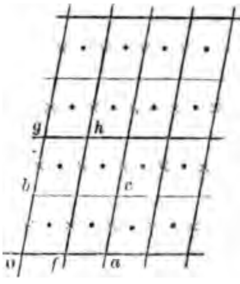
En comparant ces deux relations, on obtient

(5) $$\nu\left(\frac{\omega}{2} + z\right) = \nu(z),$$

ce qui donne une première période $\frac{\omega}{2}$. La seconde période est $2\omega'$.

A partir de l'origine, portons comme précédemment les quantités géométriques Oa et Ob égales à ω et ω', et prenons

Fig. 20.



$$Of = \frac{Oa}{2} \quad \text{et} \quad Og = 2Ob;$$

le parallélogramme $Ofhg$ sera le parallélogramme élémentaire de la fonction ν; l'aire de ce parallélogramme est la même que celle du parallélogramme $Oacb$, qui se rapporte à la fonction λ.

La fonction ν admet dans chaque parallélogramme les deux zéros $z = \pm\left(\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}\right)$ et les deux infinis simples $z = \pm\frac{\omega'}{2}$. La somme des deux valeurs de z qui, dans un même parallélogramme, correspondent à une même valeur de ν, est égale à zéro. Nous avons marqué sur la figure les zéros et les infinis de la fonction $\nu(z)$.

100. On a

(6) $$\nu\left(\frac{\omega}{4}\right) = \sqrt{1-k^2} = k',$$

en désignant par k' celle des deux valeurs du radical $\sqrt{1-k^2}$ qui est égale à $\nu\left(\frac{\omega}{4}\right)$. On a aussi

$$\mu\left(\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}\right) = \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}} = \pm\frac{k'i}{k}.$$

Dans tout ce qui précède, le signe de la seconde période ω' est resté arbitraire; on peut toujours choisir ce signe de manière à avoir

(7) $$\mu\left(\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}\right) = -\frac{k'i}{k};$$

car

$$\mu\left(\frac{\omega}{4} - \frac{\omega'}{2}\right) = -\mu\left(\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}\right).$$

De la relation $\lambda\left(\frac{\omega'}{2}+z\right)=\frac{1}{k\lambda(z)}$ on déduit

$$\mu\left(\frac{\omega'}{2}+z\right)=\sqrt{1-\frac{1}{k^2\lambda^2(z)}}=\pm i\frac{\nu(z)}{k\lambda(z)},$$

$$\nu\left(\frac{\omega'}{2}+z\right)=\sqrt{1-\frac{1}{\lambda^2(z)}}=\pm i\frac{\mu(z)}{\lambda(z)}.$$

Il faut mettre le signe — devant les deux expressions, puisque

$$\mu\left(\frac{\omega'}{2}+\frac{\omega}{4}\right)=-\frac{k'i}{k}\quad\text{et}\quad\nu\left(\frac{\omega}{4}\right)=k'.$$

Il en résulte les deux relations suivantes :

(8) $$\mu\left(\frac{\omega'}{2}+z\right)=-i\frac{\nu(z)}{k\lambda(z)},$$

(9) $$\nu\left(\frac{\omega'}{2}+z\right)=-i\frac{\mu(z)}{\lambda(z)}.$$

101. On appelle valeurs *complémentaires* de la variable z deux valeurs dont la somme est égale à $\frac{\omega}{4}$. Il existe des relations très-simples entre les valeurs des fonctions elliptiques pour des valeurs complémentaires de la variable.

La fonction $\lambda\left(\frac{\omega}{4}-z\right)$ est paire et se réduit à l'unité pour $z=0$; ses zéros $\pm\frac{\omega}{4}$ sont ceux de $\mu(z)$; ses infinis $\pm\left(\frac{\omega}{4}+\frac{\omega'}{2}\right)$ sont les zéros de $\nu(z)$; on a donc

$$\lambda\left(\frac{\omega}{4}-z\right)=A\frac{\mu(z)}{\nu(z)}.$$

Si l'on fait $z=0$, on trouve $A=1$, et l'on obtient ainsi la relation

(10) $$\lambda\left(\frac{\omega}{4}-z\right)=\frac{\mu(z)}{\nu(z)}.$$

La fonction $\mu\left(\frac{\omega}{4}-z\right)$ est impaire ; elle admet les mêmes zéros que la fonction $\lambda(z)$, et ses infinis sont les zéros de $\nu(z)$.

On a donc

$$\mu\left(\frac{\omega}{4}-z\right)=B\frac{\lambda(z)}{\nu(z)}.$$

Si l'on fait $z=\frac{\omega}{4}$, il vient $B=k'$ et l'on obtient la seconde relation

$$(11)\qquad \mu\left(\frac{\omega}{4}-z\right)=k'\frac{\lambda(z)}{\nu(z)}.$$

La fonction $\nu\left(\frac{\omega}{4}-z\right)$ est paire; ses infinis sont les zéros de $\nu(z)$ et réciproquement; on a donc

$$\nu\left(\frac{\omega}{4}-z\right)=\frac{C}{\nu(z)}.$$

En faisant $z=\frac{\omega}{4}$, on trouve $C=k'$, et, par suite,

$$(12)\qquad \nu\left(\frac{\omega}{4}-z\right)=\frac{k'}{\nu(z)}.$$

Quand le paramètre k se réduit à zéro, la fonction λ devient un sinus et la fonction μ un cosinus; quant à la fonction ν, elle devient égale à l'unité. Voilà pourquoi, outre l'analogie des propriétés, on a comparé la fonction λ à un sinus, la fonction μ à un cosinus. L'analogie conduirait aussi à considérer comme un nouveau sinus la fonction $\mu\left(\frac{\omega}{4}-z\right)$, et comme un nouveau cosinus la fonction $\lambda\left(\frac{\omega}{4}-z\right)$. Relativement à la première période ω, ces deux fonctions jouissent de propriétés analogues à celles du sinus et du cosinus. La première est impaire et admet les deux zéros $z=0$, $z=\frac{\omega}{2}$; la seconde est paire et admet les deux zéros $z=\pm\frac{\omega}{4}$.

102. On est conduit aussi à considérer la fonction $\frac{\lambda(z)}{\mu(z)}$, analogue à la tangente, et que nous désignons par la lettre ϖ. Cette fonction est impaire; ses deux périodes sont $\frac{\omega}{2}$ et $2\omega'$; elle admet les zéros de $\lambda(z)$ et devient infinie pour les valeurs qui annulent $\mu(z)$.

On a

(13) $$\varpi\left(\frac{\omega}{4}-z\right)=\frac{1}{k'\varpi(z)},$$

(14) $$\varpi\left(\frac{\omega'}{2}+z\right)=\frac{i}{\nu(z)}.$$

On en déduit

$$\varpi\left(\frac{\omega}{8}\right)=\frac{1}{\sqrt{k'}},\quad \varpi\left(\frac{\omega'}{2}\right)=i,\quad \varpi\left(\frac{\omega}{4}+\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{i}{k'}.$$

On obtient des fonctions monodromes doublement périodiques du second ordre, en combinant deux à deux, par multiplication ou division, les quatre fonctions $\sqrt{1\pm\lambda(z)}$, $\sqrt{1\pm k\lambda(z)}$; d'après ce que nous avons dit, chacune de ces fonctions reste monodrome quand λ devient égale à ± 1 ou à $\pm\frac{1}{k}$, mais elle cesse de l'être quand λ devient infinie; toutefois les produits ou les quotients de ces fonctions deux à deux restent monodromes pour toutes les valeurs de z. Parmi ces combinaisons, nous avons étudié spécialement celles que nous avons appelées μ et ν. Nous signalerons encore les suivantes $\sqrt{(1-\lambda)(1-k\lambda)}$, $\sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}$, $\sqrt{\frac{1-k\lambda}{1+k\lambda}}$. Il est clair que les quotients deux à deux des fonctions ainsi formées fourniront aussi des fonctions monodromes doublement périodiques du second ordre; à cette catégorie appartient la fonction ϖ.

103. Dans le cas où le paramètre g est égal à l'unité, l'équation différentielle, par laquelle on définit la fonction λ, peut se mettre sous la forme

$$\lambda'=\mu.\nu,$$

ce qui nous fait voir que la fonction doublement périodique λ' du quatrième ordre est le produit de deux fonctions doublement périodiques du second ordre. En différentiant les équations

$$\mu^2=1-\lambda^2,\quad \nu^2=1-k^2\lambda^2,$$

on a, de même,

$$\mu'=-\lambda.\nu,$$
$$\nu'=-k^2\lambda.\mu.$$

Ainsi on peut définir les trois fonctions λ, μ, ν par le système des trois équations différentielles simultanées

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\lambda}{dz} &= \mu.\nu, \\ \frac{d\mu}{dz} &= -\lambda.\nu, \\ \frac{d\nu}{dz} &= -k^2\lambda.\mu, \end{aligned} \right.$$

auxquelles on joindra les conditions initiales

$$\lambda(0) = 0, \quad \mu(0) = \nu(0) = 1.$$

CHAPITRE IV.

REMARQUES SUR LES MODULES.

Modules réciproques.

104. Il existe une relation très-simple entre les deux fonctions elliptiques qui correspondent à deux modules réciproques k et $\frac{1}{k}$. Si l'on pose $u = \frac{u'}{k}$, l'équation différentielle

$$\frac{du}{dz} = \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}$$

devient

$$\frac{du'}{dz} = k\sqrt{(1-u'^2)\left(1-\frac{1}{k^2}u'^2\right)},$$

avec la condition $u' = 0$ pour $z = 0$. On a donc

$$u' = \lambda\left(kz, \frac{1}{k}\right),$$

et, par suite,

$$(1) \qquad \lambda(z, k) = \frac{1}{k}\lambda\left(kz, \frac{1}{k}\right).$$

On en déduit

$$(2) \qquad \mu(z, k) = \nu\left(kz, \frac{1}{k}\right),$$

$$(3) \qquad \nu(z, k) = \mu\left(kz, \frac{1}{k}\right).$$

En vertu des relations précédentes, quand le module est réel, on peut toujours ramener les fonctions elliptiques au cas où le module est moindre que l'unité.

Modules complémentaires.

105. On appelle *modules complémentaires* deux modules k et k' tels que $k^2+k'^2=1$; le module k étant donné, et la fonction $\lambda(z,k)$ bien définie, on choisira le signe de k' de manière que $\nu\left(\frac{\omega}{4}\right)=k'$. L'équation

$$\frac{d\mu(z)}{dz}=-\lambda(z).\nu(z),$$

dans laquelle on remplace λ et ν par leurs valeurs en fonction de μ, devient

$$\frac{d\mu}{dz}=-\sqrt{(1-\mu^2)(1-k^2+k^2\mu^2)}=-k'\sqrt{(1-\mu^2)\left(1+\frac{k^2}{k'^2}\mu^2\right)};$$

le radical se réduisant à la valeur $+1$ pour $z=\frac{\omega}{4}$, puisque

$$\mu'\left(\frac{\omega}{4}\right)=-\lambda\left(\frac{\omega}{4}\right)\nu\left(\frac{\omega}{4}\right)=-k'.$$

Si l'on pose

$$z=\frac{\omega}{4}-\frac{z'}{k'},$$

cette équation prend la forme

$$\frac{d\mu}{dz'}=\sqrt{(1-\mu^2)\left(1+\frac{k^2}{k'^2}\mu^2\right)},$$

la fonction μ s'évanouissant avec la variable z', et le radical se réduisant à l'unité. On voit par là que la fonction $\mu\left(\frac{\omega}{4}-\frac{z'}{k'}\right)$ est une fonction λ de la variable z', ayant pour module $\frac{ki}{k'}$; on a donc

$$\mu\left(\frac{\omega}{4}-\frac{z'}{k'},k\right)=\lambda\left(z',\frac{ki}{k'}\right),$$

ou

$$(4)\qquad \mu\left(\frac{\omega}{4}-z,k\right)=\lambda\left(k'z,\frac{ki}{k'}\right).$$

106. De l'équation

$$\frac{d\nu(z)}{dz} = -k^2\lambda(z)\mu(z),$$

on déduit de même

$$\frac{d\nu}{dz} = -k'i\sqrt{(1-\nu^2)\left(1-\frac{\nu^2}{k'^2}\right)},$$

le radical se réduisant à la valeur $+1$ pour $z = \frac{\omega}{4} - \frac{\omega'}{2}$; car on a

$$\nu'\left(\frac{\omega}{4} - \frac{\omega'}{2}\right) = -k^2\lambda\left(\frac{\omega}{4} - \frac{\omega'}{2}\right)\mu\left(\frac{\omega}{4} - \frac{\omega'}{2}\right) = -k'i.$$

Si l'on pose

$$z = \frac{\omega}{4} - \frac{\omega'}{2} - \frac{z'}{k'i},$$

cette équation prend la forme

$$\frac{d\nu}{dz'} = \sqrt{(1-\nu^2)\left(1-\frac{\nu^2}{k'^2}\right)},$$

la fonction ν s'évanouissant avec la variable z', et le radical se réduisant à l'unité. Ceci montre que la fonction

$$\nu\left(\frac{\omega}{4} - \frac{\omega'}{2} - \frac{z'}{k'i}, k\right)$$

est une fonction λ de la variable z' ayant pour module $\frac{1}{k'}$. On a donc

$$\nu\left(\frac{\omega}{4} - \frac{\omega'}{2} - \frac{z'}{k'i}, k\right) = \lambda\left(z', \frac{1}{k'}\right) = k'\lambda\left(\frac{z'}{k'}, k'\right),$$

ou, en vertu des relations (9) et (12) des nos 100 et 101,

(5) $$\lambda(iz, k') = i\varpi(z, k).$$

On en déduit

(6) $$\mu(iz, k') = \frac{1}{\mu(z,k)}, \quad \nu(iz, k') = \frac{\nu(z,k)}{\mu(z,k)}.$$

107. Ici se présentent quelques applications des remarques que nous avons faites au n° 90 sur les périodes elliptiques.

Imaginons que l'on change le signe du module k; ce module n'entrant que par son carré dans l'équation différentielle, la fonction λ ne change pas, et l'on a

$$\lambda(z,k) = \lambda(z,-k).$$

Ces deux fonctions, en tant que fonctions doublement périodiques, admettent évidemment les mêmes périodes, mais non les mêmes périodes elliptiques. Désignons en effet par ω et ω' un système de deux périodes elliptiques de la fonction $\lambda(z,k)$; on obtiendra un système de périodes elliptiques de la fonction $\lambda(z,-k)$ en prenant $\omega_1 = \omega$, $\omega'_1 = \omega + \omega'$, afin que la relation

$$\lambda\left(\frac{\omega_1}{4} + \frac{\omega'_1}{2}, -k\right) = -\frac{1}{k}$$

soit satisfaite.

Nous avons trouvé (n° **104**), entre deux fonctions elliptiques à modules réciproques, la relation

$$\lambda\left(kz, \frac{1}{k}\right) = k\lambda(z,k).$$

Les deux fonctions $\lambda(z,k), \lambda\left(kz, \frac{1}{k}\right)$, en tant que fonctions doublement périodiques, admettent les mêmes périodes; mais un système de périodes elliptiques de l'une ne constitue pas un système de périodes elliptiques pour la seconde.

Désignons en effet par ω et ω' deux périodes elliptiques de la fonction $\lambda(z,k)$, et par ω_1, ω'_1 deux périodes elliptiques de la fonction $\lambda\left(kz, \frac{1}{k}\right)$. Si, dans la relation précédente, on fait $z = \frac{\omega}{4} - \frac{\omega'}{2}$, ou $z = \frac{\omega}{4}$, on a

$$\lambda\left[k\left(\frac{\omega}{4} - \frac{\omega'}{2}\right), \frac{1}{k}\right] = 1,$$

$$\lambda\left(k\frac{\omega}{4}, \frac{1}{k}\right) = k;$$

on posera donc

$$\frac{\omega_1}{4} = \frac{\omega}{4} - \frac{\omega'}{2}, \quad \frac{\omega_1}{4} + \frac{\omega'_1}{2} = \frac{\omega}{4};$$

d'où l'on déduit

$$\omega_1 = \omega - 2\omega',$$
$$\omega'_1 = \omega'.$$

La fonction $\lambda\left(kz, \frac{1}{k}\right)$ admet pour périodes elliptiques, non plus ω et ω', mais $\omega - 2\omega'$ et ω'.

Nous avons obtenu (n° 106) entre les fonctions elliptiques à modules complémentaires la relation

$$\lambda(z, k') = -i\varpi(iz, k).$$

Si l'on désigne, comme précédemment, par ω et ω' deux périodes elliptiques de la fonction $\lambda(z,k)$, on voit que la fonction $\lambda(z,k')$ admettra les deux périodes $-\frac{\omega}{2}i$ et $-2\omega' i$, mais non en qualité de périodes elliptiques. Si l'on fait

$$z = \frac{\omega' i}{2},$$

ou

$$z = \frac{\omega i}{4} + \frac{\omega' i}{2},$$

on déduit de la relation précédente

$$\lambda\left(\frac{\omega' i}{2}, k'\right) = i\varpi\left(\frac{\omega'}{2}, k\right) = -1,$$
$$\lambda\left(\frac{\omega i}{4} + \frac{\omega' i}{2}, k'\right) = i\varpi\left(\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}, k\right) = -\frac{1}{k'}.$$

Pour avoir les périodes elliptiques de la fonction $\lambda(z,k')$, on posera donc

$$-\frac{\omega_1}{4} = \frac{\omega' i}{2}, \quad -\frac{\omega_1}{4} + \frac{\omega'_1}{2} = \frac{\omega i}{4} + \frac{\omega' i}{2};$$

d'où

$$\omega_1 = -2\omega' i, \quad \omega'_1 = \frac{\omega i}{2}.$$

Cas où le module est réel.

108. La fonction elliptique a été l'objet des remarquables travaux de Legendre, d'Abel et de Jacobi. Legendre a étudié

plus particulièrement le cas où le module est réel et moindre que l'unité.

Dans ce cas, la fonction inverse, donnée par l'intégrale définie

$$z = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

ne reste réelle que si u varie de -1 à $+1$; si l'on pose

$$u = \sin\varphi,$$

il vient

$$z = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

en désignant par $\Delta\varphi$ le radical $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$. Legendre, qui ne se s'occupait que de la quadrature ou de la fonction inverse, regardait l'angle φ comme l'amplitude de la valeur z de l'intégrale définie. Jacobi, qui, avec Abel, a le premier considéré la fonction directe u, a été conduit d'après cela à représenter cette fonction directe par le symbole $\sin amz$ (c'est-à-dire $\sin\varphi$, ou sinus amplitude z) ; il représentait de même la fonction $\mu(z)$ ou $\cos\varphi$ par $\cos amz$, et la fonction $\nu(z)$ ou $\Delta\varphi$ par Δamz. Mais nous préférons conserver, même dans ce cas particulier, pour représenter les trois fonctions directes, les signes $\lambda(z)$, $\mu(z)$, $\nu(z)$, qui sont beaucoup plus simples et plus commodes dans le calcul.

109. Lorsque le paramètre k est réel et moindre que l'unité (nous le supposerons positif), si l'on choisit les périodes elliptiques particulières indiquées au n° 84, on voit que la première période

$$\omega = 4\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

est réelle et positive ; la seconde

$$\omega' = -2\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = 2i\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-k^2u^2)}}$$

est imaginaire. Si l'on pose

$$k^2 + k'^2 = 1, \quad k^2 u^2 + k'^2 u'^2 = 1,$$

cette dernière intégrale devient

$$\omega' = 2i \int_0^1 \frac{du'}{\sqrt{(1-u'^2)(1-k'^2 u'^2)}} = 2i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2\varphi}}.$$

Le module complémentaire k' étant aussi réel et moindre que l'unité, la fonction $\lambda(z, k')$ admet également une période réelle positive ω_1 et une période imaginaire ω'_1. En vertu de la formule précédente, on a

$$\omega' = \frac{\omega_1 i}{2}.$$

La période imaginaire de la fonction $\lambda(z, k)$ égale la moitié de la période réelle de la fonction $\lambda(z, k')$, multipliée par i.

110. Il est à remarquer que, dans le cas particulier que nous considérons en ce moment, la fonction elliptique $\lambda(z)$ est réelle et moindre que l'unité, pour toutes les valeurs réelles de la variable z. Car u variant de 0 à 1 en ligne droite, z varie de 0 à $\frac{\omega}{4}$ aussi en ligne droite; réciproquement, quand z marche sur l'axe ox de 0 à $\frac{\omega}{4}$, u reste réelle et croît de 0 à 1. En vertu de la formule

$$\lambda\left(\frac{\omega}{4} + z\right) = \lambda\left(\frac{\omega}{4} - z\right),$$

on voit que, lorsque la variable continue son mouvement sur l'axe ox de $\frac{\omega}{4}$ à $\frac{\omega}{2}$, la fonction reste réelle et décroît de 1 à 0. La formule

$$\lambda\left(\frac{\omega}{2} + z\right) = -\lambda(z)$$

montre ensuite que de $\frac{\omega}{2}$ à ω la fonction devient négative, décroissant d'abord de 0 à -1, puis croissant de -1 à 0. De ω

à 2ω, elle repasse par les mêmes valeurs que précédemment, et ainsi de suite indéfiniment.

Les deux fonctions $\mu(z)$ et $\nu(z)$ sont aussi réelles et moindres que l'unité pour toutes les valeurs réelles de z. La fraction μ décroît de $+1$ à -1, quand z varie de o à $\frac{\omega}{2}$, puis elle croît de -1 à $+1$, quand z varie de $\frac{\omega}{2}$ à ω. Quant à la fonction ν, elle reste non-seulement réelle, mais encore positive et moindre que l'unité. Nous avons déterminé (n° 100) le signe du module complémentaire k' par la condition $\nu\left(\frac{\omega}{4}\right)=k'$; c'est donc la valeur positive qui entre dans nos calculs.

111. Si l'on donne à la variable z des valeurs imaginaires de la forme $z'i$, z' étant réelle, la fonction sera imaginaire et de la forme $u'i$. Car si l'on pose

$$u=u'i,$$

u' étant réelle, on aura

$$z=i\int_0^{u'}\frac{du'}{\sqrt{(1+u'^2)(1+k^2u'^2)}}=z'i.$$

Réciproquement, quand la variable z marche sur l'axe oy de o à $\frac{\omega'}{2}$, la fonction u prend des valeurs de la forme $u'i$, u' croissant de zéro à l'infini.

Les deux fonctions $\mu(z)$ et $\nu(z)$ restent réelles. Quand x varie de o à $\frac{\omega'}{2}$, ces deux fonctions croissent de $+1$ à $+\infty$; x variant ensuite de $\frac{\omega'}{2}$ à ω', de ω' à $\frac{3\omega'}{2}$, de $\frac{3\omega'}{2}$ à $2\omega'$, elles croissent de $-\infty$ à -1, pour décroître de -1 à $-\infty$ et de $+\infty$ à $+1$; au delà les mêmes valeurs se reproduisent périodiquement. La manière dont nous avons choisi la seconde période ω', qui est égale à une quantité réelle positive, multipliée par i, s'accorde avec l'hypothèse faite au n° 100; car, de l'équation (14), n° 102, on déduit $\varpi\left(\frac{\omega'}{2}-z\right)=\frac{i}{\nu(z)}$, et, quand z

est imaginaire. Si l'on pose ... égale à une quantité po-

$$k^2 + k'^2 = 1, \quad k'$$

cette dernière intégrale d... ...ile de trouver les valeurs de ...connues celles qui correspondent ...car les relations du n° 106 donnent

$$\omega' = 2i \int_0^1 - \quad \ldots \quad \mu(iz, k) = \frac{1}{\mu(z, k')}, \quad \nu(iz, k) = \frac{\nu(z, k')}{\mu(z, k')}.$$

Le mod... que l'ur... réell... for...

...verrons plus tard comment on peut exprimer les valeurs des fonctions elliptiques pour des valeurs imaginaires quelconques de la variable, à l'aide de valeurs qui correspondent à des valeurs réelles de la variable.

On peut ramener au cas du module réel celui où le module est imaginaire et de la forme $k\,i$, au moyen de la formule (4) du n° 105.

LIVRE IV

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS ELLIPTIQUES EN SÉRIES.

CHAPITRE PREMIER.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS ELLIPTIQUES EN SÉRIES DE FRACTIONS.

Méthode générale pour le développement des fonctions en fractions rationnelles.

112. Soit $f(z)$ une fonction monodrome et monogène dans une certaine portion du plan, mais devenant infinie en certains points. Marquons un point quelconque t (*fig.* 21) dans cette portion du plan, nous aurons

Fig. 21.

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)\,dz}{z-t}=f(t)+\mathcal{E}\frac{f(z)}{z-t},$$

l'intégrale définie étant prise le long de la courbe fermée qui limite le contour de l'aire plane considérée, et le signe résidu s'appliquant à tous les points tels que $z=\alpha$, qui rendent la fonction $f(z)$ infinie dans cette portion du plan. On en déduit

$$(1)\qquad f(t)=\mathcal{E}\frac{f(z)}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)\,dz}{z-t}.$$

Supposons maintenant que l'on augmente indéfiniment, et dans tous les sens, la courbe fermée suivant laquelle on effectue l'intégration, de manière qu'elle embrasse tout le plan, la première partie du second membre, ou la somme des résidus, sera convergente, si le second terme, ou le reste que nous représenterons par R, a pour limite zéro. On peut simplifier

l'expression de ce reste; la courbe étant infiniment grande, on aura, sur cette courbe,

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{z} + \frac{t}{z^2}(1+\varepsilon),$$

ε désignant une quantité infiniment petite, et par suite

$$R = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,dz}{z-t} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,dz}{z} + \frac{t}{2\pi i}\int \frac{f(z).(1+\varepsilon)}{z^2}dz.$$

Si, le long de la courbe variable, le module de la fonction $f(z)$ reste moindre qu'une quantité finie, la seconde partie du reste a pour limite zéro, et l'on se bornera à considérer la première partie

$$(2) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,dz}{z}.$$

Application aux fonctions coséc z et séc z.

113. Appliquons la formule précédente au développement de la fonction $f(z) = \frac{1}{\sin z}$, qui devient infinie pour les valeurs $z = m\pi$ (m désignant un entier quelconque positif ou négatif), distribuées uniformément sur l'axe des x. Intégrons suivant le contour d'un rectangle formé par des parallèles à l'axe des y, menées à la distance $m'\pi + \frac{\pi}{2}$ de l'origine, et par des parallèles à l'axe des x à une distance très-grande arbitraire Y. On reconnaît aisément que le module de la fonction *coséc z* est moindre que l'unité sur les premières parallèles, et très-petit sur les dernières. Il en résulte que la seconde partie du reste a pour limite zéro, quand on fait croître m' et Y indéfiniment. Quant à la première partie, elle est identiquement nulle; car, la fonction étant impaire, les éléments différentiels, qui correspondent à deux éléments du rectangle symétriques par rapport au centre, sont égaux et de signes contraires. Ainsi la fonction proposée se développe en une série convergente.

Pour évaluer le résidu relatif à un infini quelconque $m\pi$ de la fonction $\frac{1}{\sin z}$, posons $z = m\pi + z'$, et considérons l'inté-

grale définie

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{dz}{(t-z)\sin z}=\frac{(-1)^m}{2\pi i}\int\frac{dz'}{(t-m\pi-z')\sin z'},$$

prise le long d'un cercle infiniment petit décrit autour du point $m\pi$; on peut réduire cette intégrale à

$$\frac{(-1)^m}{t-m\pi}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\frac{dz'}{z'}=\frac{(-1)^m}{t-m\pi}.$$

On a ainsi, en vertu de la formule (1),

$$\frac{1}{\sin t}=\lim\sum_{m=-m'}^{m=m'}\frac{(-1)^m}{t-m\pi},$$

ou, en remplaçant t par z,

(3) $$\frac{1}{\sin z}=\lim\sum_{m=-m'}^{m=m'}\frac{(-1)^m}{z-m\pi}.$$

En groupant deux à deux les termes fournis par des valeurs de m égales et de signes contraires, on obtient la formule connue

(4) $$\frac{1}{\sin z}=\frac{1}{z}+2z\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{(-1)^m}{z^2-m^2\pi^2}.$$

Si dans la formule (3) on remplace z par $z-\frac{\pi}{2}$, il vient

$$-\frac{1}{\cos z}=\lim\sum_{m=-m'}^{m=m'}\frac{(-1)^m}{z-(2m+1)\frac{\pi}{2}}=\lim\sum_{m=-m'-1}^{m=m'}\frac{(-1)^m}{z-(2m+1)\frac{\pi}{2}}.$$

Nous avons ajouté un terme infiniment petit à gauche de la double série convergente, celui qui correspond à $m=-m'-1$, afin d'avoir autant de termes d'un côté que de l'autre. Le groupement des facteurs conduit à l'expression

(5) $$\frac{1}{\cos z}=\pi\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{(2m+1)(-1)^m}{(2m+1)^2\frac{\pi^2}{4}-z^2}.$$

Application aux fonctions $\cot z$ et $\tang z$.

114. Les infinis de la fonction $\cot z$ ou $\frac{\cos z}{\sin z}$ sont les mêmes que ceux de la fonction précédente. On intégrera suivant le même rectangle; le module de la fonction $\cot z$ étant moindre que l'unité sur les premières parallèles, et différant très-peu de l'unité sur les autres, la seconde partie du reste a pour limite zéro; d'ailleurs, la première partie est nulle, puisque la fonction est impaire. On aura encore une série convergente.

Pour évaluer l'un quelconque des résidus, on posera $z = m\pi + z'$, et l'on considérera l'intégrale définie

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\cot z}{t-z}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\cot z'}{t - m\pi - z'}\,dz',$$

prise le long d'un cercle infiniment petit décrit autour du point $z = m\pi$; cette intégrale se réduit à

$$\frac{1}{t-m\pi}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\frac{dz'}{z'} = \frac{1}{t-m\pi}.$$

On a donc

$$(6)\qquad \cot z = \lim \sum_{m=-m'}^{m=m'} \frac{1}{z-m\pi},$$

et, si l'on groupe les termes deux à deux,

$$(7)\qquad \cot z = \frac{1}{z} + 2z\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{z^2 - m^2\pi^2}.$$

En remplaçant z par $z - \frac{\pi}{2}$, et ajoutant un terme infiniment petit, on déduit de la formule (6)

$$(8)\qquad \tang z = -\lim \sum_{m=-m'-1}^{m=m'} \frac{1}{z - (2m+1)\frac{\pi}{2}},$$

d'où

$$(9)\qquad \tang z = 2z\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{1}{(2m+1)^2\frac{\pi^2}{4} - z^2}.$$

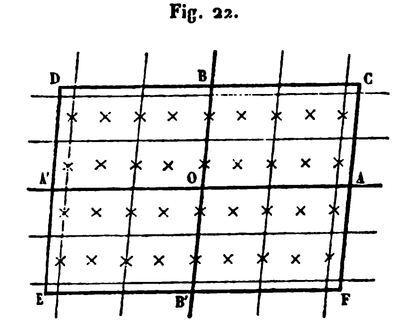
Application à la fonction λ.

115. La fonction $\lambda(z)$ est impaire; ses infinis sont représentés par la formule

$$z = m\frac{\omega}{2} + (2n+1)\frac{\omega'}{2},$$

dans laquelle m et n sont des nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs. Portons dans la direction de la première période ω, et de part et d'autre de l'origine (*fig.* 22), une longueur OA, OA', égale à $m'\frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{4}$, et, dans la direction de la seconde période, une longueur OB, OB', égale à $(n'+1)\omega'$. Nous formerons ainsi un parallélogramme CDEF, le long duquel nous effectuerons l'intégration. La fonction $\lambda(z)$ conserve évidemment une valeur finie sur le contour du parallélogramme; ainsi la seconde partie du reste a pour limite zéro, quand on fait croître m' et n' indéfiniment; d'ailleurs la première partie est identiquement nulle, puisque la fonction est impaire.

Fig. 22.



Pour évaluer le résidu relatif à un infini quelconque, il suffit de poser

$$z = m\frac{\omega}{2} + (2n+1)\frac{\omega'}{2} + z';$$

d'où

$$\lambda(z) = (-1)^m \lambda\left(\frac{\omega'}{2} + z'\right) = \frac{(-1)^m}{k\lambda(z')},$$

et d'intégrer le long d'un cercle infiniment petit décrit autour du point $z = m\frac{\omega}{2} + (2n+1)\frac{\omega'}{2}$, ce qui donne

$$\frac{(-1)^m}{k\left(t - m\frac{\omega}{2} - (2n+1)\frac{\omega'}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2\pi i}\int \frac{dz'}{\lambda(z')} = \frac{(-1)^m}{k\left(t - m\frac{\omega}{2} - (2n+1)\frac{\omega'}{2}\right)}.$$

On a donc

$$(10)\quad \lambda(z) = \lim \frac{1}{k} \sum_{n=-n'-1}^{n=n'} \sum_{m=-m'}^{m=m'} \frac{(-1)^m}{z - m\frac{\omega}{2} - (2n+1)\frac{\omega'}{2}}.$$

Pour ramener cette somme double à une somme simple, nous grouperons les termes par files parallèles à la direction ω. On a, en vertu de la formule (3),

$$\lim \sum_{m=-m'}^{m=m'} \frac{(-1)^m}{z-(2n+1)\frac{\omega'}{2}-m\frac{\omega}{2}} = \frac{2\pi}{\omega}\cdot\lim \sum_{m=-m'}^{m=m'} \frac{(-1)^m}{\left(\frac{2\pi z}{\omega}-(2n+1)\pi\rho\right)-m\pi}$$

$$= \frac{2\pi}{\omega}\cdot\frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi z}{\omega}-(2n+1)\pi\rho\right)};$$

d'où

$$\lambda(z) = \frac{2\pi}{k\omega}\cdot\lim \sum_{n=-n'-1}^{n=n'} \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi z}{\omega}-(2n+1)\pi\rho\right)}.$$

Nous avons vu (n° 72) que les deux parties de cette série, prolongée vers la droite ou vers la gauche, sont séparément convergentes. On écrira donc

$$(11)\qquad \lambda(z) = \frac{2\pi}{k\omega} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi z}{\omega}-(2n+1)\pi\rho\right)}.$$

En groupant les termes deux à deux, on en déduit

$$(12)\quad \lambda(z) = \frac{8\pi}{k\omega}\sin\frac{2\pi z}{\omega}\cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi\rho}{\cos 2(2n+1)\pi\rho - \cos\frac{4\pi z}{\omega}}.$$

Jacobi représente par q la quantité $e^{i\pi\rho i}$; si dans l'expression du rapport des périodes $\rho = \frac{\omega'}{\omega} = r + si$, rapport toujours imaginaire, la quantité s est positive, la quantité q a son module moindre que l'unité; en introduisant cette quantité dans

a série (12), on est conduit à la forme

$$(13)\quad \lambda(z) = \frac{8}{k}\frac{\pi\sqrt{q}}{\omega}\sin\frac{2\pi z}{\omega}\cdot\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{q^n(1+q^{2n+1})}{1-2q^{2n+1}\cos\frac{4\pi z}{\omega}+q^{2(2n+1)}},$$

donnée par Jacobi.

Application à la fonction μ.

116. Proposons-nous maintenant de développer la fonction impaire $\mu\left(z-\frac{\omega}{4}\right)$. Intégrant le long d'un parallélogramme qui a pour centre l'origine, on verra, comme précédemment, que le reste est nul. Les infinis de cette fonction sont donnés par la formule

$$z = (2m+1)\frac{\omega}{4} + (2n+1)\frac{\omega'}{2},$$

dans laquelle il faut faire varier m de $-m'-1$ à m' et n de $-n'-1$ à n'. Pour évaluer le résidu relatif à l'un quelconque de ces infinis, on posera

$$z = (2m+1)\frac{\omega}{4} + (2n+1)\frac{\omega'}{2} + z';$$

d'où

$$\mu\left(z-\frac{\omega}{4}\right) = \mu\left(m\frac{\omega}{2} + n\omega' + \frac{\omega'}{2} + z'\right) = (-1)^{m+n}\mu\left(\frac{\omega'}{2}+z'\right),$$

et, en vertu de la formule (8) du n° 100,

$$\mu\left(z-\frac{\omega}{4}\right) = -\frac{i}{k}(-1)^{m+n}\frac{\nu(z')}{\lambda(z')}.$$

Prenant l'intégrale le long d'un cercle infiniment petit décrit autour du point considéré, on aura pour le résidu correspondant

$$-\frac{i}{k}\frac{(-1)^{m+n}}{t-(2m+1)\frac{\omega}{4}-(2n+1)\frac{\omega'}{2}}.$$

On a ainsi

$$\mu\left(z-\frac{\omega}{4}\right) = -\frac{i}{k}\cdot\lim\sum_{n=-n'-1}^{n=n'}(-1)^n\sum_{m=-m'-1}^{m=m'}\frac{(-1)^m}{z-(2m+1)\frac{\omega}{4}-(2n+1)\frac{\omega'}{2}},$$

et, en remplaçant $z - \frac{\omega}{4}$ par z,

$$(14)\quad \mu(z) = -\lim \sum_{n=-n'-1}^{n=n'} (-1)^n \sum_{m=-m'-1}^{m=m'} \frac{(-1)^m}{z - m\frac{\omega}{2} - (2n+1)\frac{\omega'}{2}}.$$

En supprimant un terme infiniment petit à gauche, ce qui n'a pas d'inconvénient, on a, comme précédemment,

$$\lim \sum_{m=-m'-1}^{m=m'} \frac{(-1)^m}{z - m\frac{\omega}{2} - (2n+1)\frac{\omega'}{2}} = \lim \sum_{m=-m'}^{m=m'} \frac{(-1)^m}{z - m\frac{\omega}{2} - (2n+1)\frac{\omega'}{2}}$$

$$= \frac{2\pi}{\omega} \frac{1}{\sin\left[\frac{2\pi z}{\omega} - (2n+1)\pi\rho\right]},$$

et, par suite,

$$\mu(z) = -\frac{2\pi i}{k\omega} \lim \sum_{n=-n'-1}^{n=n'} \frac{(-1)^n}{\sin\left[\frac{2\pi z}{\omega} - (2n+1)\pi\rho\right]},$$

ou, plus simplement, d'après la remarque déjà faite,

$$(15)\quad \mu(z) = -\frac{2\pi i}{k\omega} \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{\sin\left[\frac{2\pi z}{\omega} - (2n+1)\pi\rho\right]}.$$

Si l'on groupe les termes deux à deux, on obtient la série

$$(16)\quad \mu(z) = -\frac{8\pi i}{k\omega} \cos\frac{2\pi z}{\omega} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \sin(2n+1)\pi\rho}{\cos 2(2n+1)\pi\rho - \cos\frac{4\pi z}{\omega}},$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$(17)\quad \mu(z) = \frac{8\pi\sqrt{q}}{k\omega} \cos\frac{2\pi z}{\omega} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n q^n (1 - q^{2n+1})}{1 - 2q^{2n+1}\cos\frac{4\pi z}{\omega} + q^{2(2n+1)}}.$$

Application à la fonction ν.

117. Considérons actuellement la fonction impaire

$$\nu\left(z + \frac{\omega'}{2}\right).$$

Intégrant le long d'un parallélogramme qui a pour centre l'origine, on verra encore que le reste est nul. Les infinis de la fonction $\nu\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)$ sont représentés par la formule

$$z = m\frac{\omega}{2} + n\omega',$$

dans laquelle il faut faire varier m de $-m'$ à m', et n de $-n'$ à n'. Pour évaluer le résidu relatif à un infini quelconque, on posera

$$z = m\frac{\omega}{2} + n\omega' + z';$$

d'où

$$\nu\left(z+\frac{\omega'}{2}\right) = (-1)^n \nu\left(\frac{\omega'}{2}+z'\right) = -i(-1)^n \frac{\mu(z')}{\lambda(z')},$$

d'après la formule (9) du n° 100; on trouve ainsi pour le résidu

$$-i\frac{(-1)^n}{t - m\frac{\omega}{2} - n\omega'},$$

et par suite

$$\nu\left(z+\frac{\omega'}{2}\right) = -i\lim \sum_{n=-n'}^{n=n'} (-1)^n \sum_{m=-m'}^{m=m'} \frac{1}{z - m\frac{\omega}{2} - n\omega'},$$

ou, en remplaçant $z + \frac{\omega'}{2}$ par z,

$$(18)\quad \nu(z) = -i\lim \sum_{n=-n'}^{n=n'} (-1)^n \sum_{m=-m'}^{m=m'} \frac{1}{z - m\frac{\omega}{2} - (2n+1)\frac{\omega'}{2}}.$$

En vertu de la formule (6), on a

$$\lim \sum_{m=-m'}^{m=m'} \frac{1}{z - (2n+1)\frac{\omega'}{2} - m\frac{\omega}{2}} = \frac{2\pi}{\omega}\cot\left[\frac{2\pi z}{\omega} - (2n+1)\pi\rho\right].$$

On en déduit

$$(19)\quad \nu(z) = -\frac{2\pi i}{\omega}\lim \sum_{n=-n'}^{n=n'} (-1)^n \cot\left[\frac{2\pi z}{\omega} - (2n+1)\pi\rho\right].$$

Les termes de cette dernière somme ne deviennent pas infiniment petits, quand n augmente indéfiniment; mais ils tendent vers $\pm i$. Il est facile de remédier à cet inconvénient; si l'on fait $z=0$, l'équation (19) donne

$$1=\frac{2\pi i}{\omega}\lim\sum_{n=-n'}^{n=n'}(-1)^n\cot(2n+1)\pi\rho.$$

On en déduit

$$1-\nu(z)=\frac{2\pi i}{\omega}\lim\sum_{n=-n'}^{n=n'}(-1)^n\left\{\cot(2n+1)\pi\rho+\cot\left[\frac{2\pi z}{\omega}-(2n+1)\pi\rho\right]\right\},$$

ou, plus simplement,

$$(20)\quad 1-\nu(z)=\frac{2\pi i}{\omega}\sin\frac{2\pi z}{\omega}.\lim\sum_{n=-n'}^{n=n'}\frac{(-1)^n}{\sin(2n+1)\pi\rho.\sin\left[\frac{2\pi z}{\omega}-(2n+1)\pi\rho\right]}.$$

Cette série ne présente plus le même inconvénient que la précédente; les termes tendent vers zéro. Si l'on ajoute un terme à gauche, ce qui est permis maintenant, et si l'on groupe les termes deux à deux, on a

$$(21)\quad 1-\nu(z)=\frac{8\pi i}{\omega}\sin^2\frac{2\pi z}{\omega}.\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\cot(2n+1)\pi\rho}{\cos 2(2n+1)\pi\rho-\cos\frac{4\pi z}{\omega}};$$

cette formule donne celle de Jacobi

$$(22)\quad 1-\nu(z)=\frac{16\pi}{\omega}\sin^2\frac{2\pi z}{\omega}.\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(-1)^n q^{2n+1}\left(\frac{1+q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\right)}{1-2q^{2n+1}\cos\frac{4\pi z}{\omega}+q^{2(2n+1)}}.$$

Application à la fonction ϖ.

118. Le développement de la fonction impaire $\varpi(z)$ ne présente aucune difficulté. Si l'on intègre le long d'un parallélogramme ayant pour centre l'origine, le reste est évidemment nul. Les infinis de la fonction $\varpi(z)$ sont représentés par la

formule

$$z=(2m+1)\frac{\omega}{4}+n\omega',$$

dans laquelle m varie de $-m'-1$ à m', n de $-n'$ à n'. Si l'on pose

$$z=(2m+1)\frac{\omega}{4}+n\omega'+z',$$

on a

$$\varpi(z)=(-1)^n\varpi\left(\frac{\omega}{4}+z'\right)=-\frac{(-1)^n}{k'\varpi(z')},$$

en vertu de la formule (13) du n° **102**. On obtient de la sorte

$$\varpi(z)=-\frac{1}{k'}\lim\sum_{n=-n'}^{n=n'}(-1)^n\sum_{m=-m'-1}^{m=m'}\frac{1}{z-(2m+1)\frac{\omega}{4}-n\omega'},$$

d'où

$$(23)\qquad \varpi(z)=\frac{2\pi}{k'\omega}\sum_{n=-n'}^{n=n'}(-1)^n\operatorname{tang}\left(\frac{2\pi z}{\omega}-2n\pi\rho\right),$$

et, en groupant les termes deux à deux,

$$\varpi(z)=\frac{2\pi}{k'\omega}\left[\operatorname{tang}\frac{2\pi z}{\omega}+2\sin\frac{4\pi z}{\omega}\cdot\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(-1)^n}{\cos 4n\pi\rho+\cos\frac{4\pi z}{\omega}}\right],$$

ou bien

$$\varpi(z)=\frac{2\pi}{k'\omega}\left[\operatorname{tang}\frac{2\pi z}{\omega}+4\sin\frac{4\pi z}{\omega}\cdot\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(-1)^n q^{2n}}{1+2q^{2n}\cos\frac{4\pi z}{\omega}+q^{4n}}\right].$$

119. Dans ce qui précède nous avons supposé le paramètre g égal à l'unité; les fonctions elliptiques dépendent du seul module k ou du rapport ρ des périodes. Nous avons vu comment on exprime les deux périodes, et par suite leur rapport en fonction du module à l'aide d'intégrales définies. Réciproquement, on peut, à l'aide de séries, exprimer le module k en fonction du rapport ρ des périodes supposé connu.

En effet, si dans la série (11) on fait $z = \frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}$, il vient

$$(26)\quad \omega = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{\cos 2n\pi\rho} = 2\pi\left(1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\cos 2n\pi\rho}\right)$$

$$= 2\pi\left(1 + 4\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^n}{1+q^{2n}}\right).$$

Si l'on fait ensuite $z = \frac{\omega}{4}$, il vient

$$(27)\quad k = \frac{2\pi}{\omega} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{\cos(2n+1)\pi\rho} = \frac{4\pi}{\omega} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{\cos(2n+1)\pi\rho}$$

$$= \frac{8\pi\sqrt{q}}{\omega} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{q^n}{1+q^{2n+1}}.$$

La série (26) donne la première période de ω, la série (27) donne ensuite le module k.

En faisant $z = 0$ dans la formule (17), on a de même

$$k = \frac{8\pi\sqrt{q}}{\omega} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n q^n}{1-q^{2n+1}};$$

il en résulte l'identité

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{q^n}{1+q^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n q^n}{1-q^{2n+1}}.$$

Quand on donne le rapport des périodes, les périodes elles-mêmes, et le module k, sont complétement déterminés. Mais la réciproque n'est pas vraie; quand on donne le module k, le rapport des périodes peut recevoir une infinité de valeurs; car, si l'on remplace les deux périodes ω et ω' par un système de périodes elliptiques équivalentes

$$\omega_1 = (4a+1)\omega + 4b\omega',$$
$$\omega'_1 = 2c\omega + (2d+1)\omega',$$

on a un nouveau rapport

$$p_1 = \frac{2c + (2d+1)p}{(4a+1) + 4bp},$$

dans lequel a, b, c, d sont des nombres entiers quelconques, assujettis seulement à vérifier la relation

$$(4a+1)(2d+1) - 8bc = \pm 1.$$

CHAPITRE II.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS ELLIPTIQUES EN PRODUITS D'UN NOMBRE INFINI DE FACTEURS.

Méthode générale pour le développement des fonctions en produits d'un nombre infini de facteurs.

120. Nous commencerons par établir quelques principes très-simples relatifs à la convergence des produits d'un nombre infini de facteurs.

Considérons le produit indéfini

$$(1+a_0)(1+a_1)(1+a_2)\ldots,$$

dans lequel nous supposons que les lettres a_0, a_1, a_2,... désignent des quantités réelles positives. Pour que le produit des m premiers facteurs tende vers une limite finie et déterminée indéfiniment, il faut d'abord que le facteur général $1+a_m$ tende vers l'unité, ce qui exige que a_m tende vers zéro. Mais cette condition n'est pas suffisante; il faut en outre que le produit

$$(1+a_m)(1+a_{m+1})\ldots(1+a_{m+n-1}),$$

d'un nombre quelconque de facteurs, pris à la suite des m premiers, ait pour limite l'unité, quand m augmente indéfiniment.

Il est facile de voir que, lorsque la série

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$$

est convergente, le produit

$$(1+a_0)(1+a_1)(1+a_2)\ldots$$

est également convergent. On a, en effet,

$$1+a_0 < e^{a_0},$$
$$1+a_1 < e^{a_1},$$
$$1+a_2 < e^{a_2},$$
$$\cdots\cdots$$

et par suite

$$(1+a_0)(1+a_1)\ldots(1+a_{m-1}) < e^{a_0+a_1+\ldots+a_{m-1}} < e^s,$$

s désignant la somme des termes de la série. Le produit augmente avec le nombre des facteurs, et reste constamment inférieur à e^s; il tend donc vers une limite finie et déterminée.

D'ailleurs cette condition est nécessaire pour la convergence du produit, car on a

$$(1+a_0)(1+a_1)\ldots(1+a_{m-1}) > a_0+a_1+\ldots+a_{m-1};$$

si cette dernière somme augmentait indéfiniment, le produit augmenterait aussi indéfiniment.

Il résulte de ce qui précède que si, à partir d'un certain rang, la quantité $\sqrt[m]{a_m}$ reste constamment moindre qu'une quantité fixe inférieure à l'unité, le produit est convergent.

121. Considérons maintenant un produit

$$(1+u_0)(1+u_1)(1+u_2)\ldots$$

de facteurs imaginaires. Appelons a_0, a_1, a_2,...., les modules des quantités imaginaires u_0, u_1, u_2,.... Si le produit des facteurs réels

$$(1+a_0)(1+a_1)(1+a_2)\ldots$$

est convergent, le produit des facteurs imaginaires est aussi convergent. Le module de

$$(1+u_m)(1+u_{m+1})\ldots(1+u_{m+n-1})-1$$

est en effet plus petit que la quantité

$$(1+a_m)(1+a_{m+1})\ldots(1+a_{m+n-1})-1,$$

qui est infiniment petite.

Il est à remarquer que si la condition précédente est remplie, le produit

$$f(z)=(1+u_0z)(1+u_1z)(1+u_2z)\ldots$$

est convergent, quelle que soit la valeur de z : ce produit définit donc une fonction finie et monodrome dans toute l'étendue du plan. Nous allons faire voir que cette fonction est en outre continue et monogène ; en effet, désignons par P_n le produit des n premiers facteurs, qui est une fonction monogène; il vient, en prenant la dérivée,

$$P'_n = P_n \times \sum_{m=0}^{m=n} \frac{u_m}{1 + u_m z}.$$

Quand n augmente indéfiniment, on a une série convergente, et P'_n tend vers une limite finie que nous appellerons P'. On a

$$P' = P'_n + \varepsilon,$$

ε tendant vers zéro quand n augmente indéfiniment; d'où

$$\int_0^z P'.dz = \int_0^z P'_n.dz + \int_0^z \varepsilon dz = P_n - 1 + \int_0^z \varepsilon dz.$$

Si l'on fait augmenter n indéfiniment, il vient

$$\int_0^z P' dz = f(z) - 1.$$

On en conclut

$$f'(z) = P';$$

par suite, la fonction $f(z)$ est monogène. Ainsi la fonction $f(z)$, définie par le produit considéré, est une fonction synectique dans toute l'étendue du plan.

122. Après avoir rappelé ces principes, nous allons exposer une méthode très-ingénieuse imaginée par M. Cauchy pour le développement des fonctions en produits d'un nombre infini de facteurs.

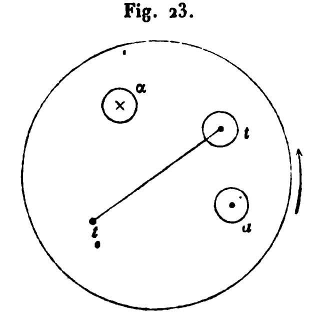
Soit $f(z)$ une fonction monodrome et monogène dans une certaine portion du plan; comme nous l'avons vu (n° 69), le quotient $\frac{f'(z)}{f(z)}$ n'admet que des infinis simples, savoir les zéros et les infinis de la fonction $f(z)$. Désignons par a un zéro quelconque de la fonction $f(z)$ dans cette portion du plan, par

p son degré, et de même par α un infini quelconque, et par q son degré. Marquons d'ailleurs un point quelconque t dans cette portion du plan ; nous aurons

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'(z)}{(z-t)f(z)}dz = \frac{f'(t)}{f(t)} + \sum \frac{p}{a-t} - \sum \frac{q}{\alpha - t},$$

l'intégrale définie étant prise le long de la courbe fermée qui limite le contour de l'aire plane considérée, et dans le sens de la flèche.

Fig. 23.



Si maintenant nous multiplions les deux membres de cette équation par dt, et si nous intégrons de t_0 à t (*fig.* 23) (t_0 étant un point fixe situé aussi dans l'intérieur de l'aire), suivant un chemin déterminé, par exemple suivant le chemin rectiligne, il viendra

$$-\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'(z)}{f(z)} \log \frac{z-t}{z-t_0}\, dz = \log \frac{f(t)}{f(t_0)}$$
$$-\sum p \log \frac{a-t}{a-t_0} + \sum q \log \frac{\alpha - t}{\alpha - t_0};$$

d'où l'on déduit la formule

$$\log \frac{f(t)}{f(t_0)} = \sum p \log \frac{a-t}{a-t_0} - \sum q \log \frac{\alpha - t}{\alpha - t_0}$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'(z)}{f(z)} \log \frac{z-t}{z-t_0}\, dz,$$

que l'on peut écrire de la manière suivante

$$(1) \quad \frac{f(t)}{f(t_0)} = \prod \frac{\left(\frac{a-t}{a-t_0}\right)^p}{\left(\frac{\alpha-t}{\alpha-t_0}\right)^q} \times e^{-\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'(z)}{f(z)} \log \frac{z-t}{z-t_0} dz},$$

la lettre $\prod$ désignant un produit de facteurs.

On suppose que la droite $t_0 t$ ne passe par aucun des points qui rendent la fonction $f(t)$ nulle ou infinie. En outre les logarithmes qui entrent dans cette formule se réduisent tous à zéro

pour $t = t_0$ et prennent ensuite le long de la droite des valeurs parfaitement déterminées que l'on suivra par continuité.

Dans le cas particulier où $t_0 = 0$, cette formule devient

$$(2)\quad \frac{f(t)}{f(0)} = \prod \frac{\left(1-\frac{t}{a}\right)^p}{\left(1-\frac{t}{\alpha}\right)^q} \times e^{-\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'(z)}{f(z)} \log\left(1-\frac{t}{z}\right) dz}.$$

Supposons maintenant que l'on augmente indéfiniment, et dans tous les sens, la ligne fermée suivant laquelle on a effectué l'intégration, de manière qu'elle embrasse tout le plan, le produit sera convergent, si le facteur complémentaire, ou l'exponentielle, tend vers l'unité, ce qui exige que l'intégrale définie

$$R = -\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'(z)}{f(z)} \log\left(1-\frac{t}{z}\right) dz,$$

prise le long de la courbe, ait pour limite zéro. On peut simplifier cette expression. Le module de z étant plus grand que celui de t tout le long de la courbe, $\log\left(1-\frac{t}{z}\right)$ se développe en série convergente, et l'on a

$$\log\left(1-\frac{t}{z}\right) = -\frac{t}{z} - \frac{t^2}{2z^2}(1+\varepsilon),$$

ε désignant une quantité infiniment petite. D'après cela, la quantité R devient

$$R = \frac{1}{2\pi i}\frac{t}{1}\int \frac{f'(z)}{f(z)}\frac{dz}{z} + \frac{1}{2\pi i}\frac{t^2}{2}\int \frac{f'(z)}{f(z)}(1+\varepsilon).\frac{dz}{z^2}.$$

Si le module de la fonction $\frac{f'(z)}{f(z)}$ est moindre qu'une quantité finie sur la courbe variable, la seconde partie de R tend vers zéro, et l'on se bornera à considérer la première partie

$$\frac{t}{2\pi i}\int \frac{f'(z)}{f(z)}\frac{dz}{z}.$$

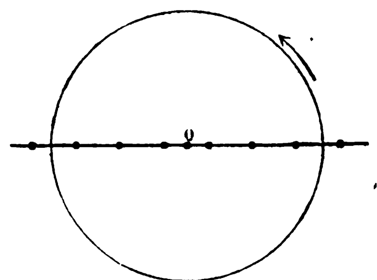
Lorsque la fonction $f(z)$ est paire ou impaire, la fonction $\frac{f'(z)}{f(z)}$ est impaire; si l'on intègre le long d'une ligne qui a pour

centre l'origine, cette dernière intégrale, ayant ses éléments égaux deux à deux et de signes contraires, est nulle; dans ce cas, la fonction $f(z)$ se développe en un produit convergent.

Application au cosinus.

123. La fonction paire $\cos z$ ne devient infinie pour aucune valeur finie de z; elle admet les zéros simples

Fiig. 24.



$$z = (2m+1)\frac{\pi}{2},$$

situés sur l'axe des x à égale distance les uns des autres (*fig.* 24). Intégrons le long d'une circonférence décrite de l'origine comme centre, avec un rayon égal à $(m'+1)\pi$. Pour évaluer plus facilement le module, nous substituerons au cercle un rectangle formé par des parallèles à l'axe des y à la distance $(m'+1)\pi$ de part et d'autre de l'origine, et par des parallèles à l'axe des x à une distance très-grande. Le module de la fonction $\frac{f'(z)}{f(z)} = -\operatorname{tang} z$ étant moindre que l'unité sur les premières parallèles et différant très-peu de l'unité sur les deux autres, la seconde partie de R a pour limite zéro. D'ailleurs, cette fonction étant impaire, la première partie est identiquement nulle. On a donc

$$\cos t = \lim \prod_{m=-m'-1}^{m=m'} \left[1 - \frac{t}{(2m+1)\frac{\pi}{2}}\right],$$

ou, en remplaçant t par z,

$$(3) \qquad \cos z = \lim \prod_{m=-m'-1}^{m=m'} \left[1 - \frac{z}{(2m+1)\frac{\pi}{2}}\right].$$

Si l'on groupe les facteurs deux à deux, on obtient la for-

mule connue

$$\text{(4)} \qquad \cos z = \prod_{m=0}^{m=\infty} \left[1 - \frac{4z^2}{(2m+1)^2\pi^2} \right].$$

Application au sinus.

124. On effectuera d'une manière analogue le développement de la fonction paire $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, qui ne devient infinie pour aucune valeur finie de z, et qui admet les zéros simples $z = m\pi$, à l'exception de $z = 0$. Si l'on intègre le long d'un cercle décrit de l'origine comme centre, avec un rayon égal à $m'\pi + \frac{\pi}{2}$, nous verrons, comme précédemment, que la seconde partie de R a pour limite zéro, de même que la première partie

$$\frac{t}{2\pi i} \int \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{dz}{z} = \frac{t}{2\pi i} \int \left(\frac{\cot z}{z} - \frac{1}{z^2} \right) dz,$$

que l'on peut réduire à

$$\frac{t}{2\pi i} \int \frac{\cot z}{z} dz.$$

On a donc

$$\text{(5)} \qquad \frac{\sin z}{z} = \lim \prod_{m=-m'}^{m=m'} \left(1 - \frac{z}{m\pi} \right),$$

m recevant toutes les valeurs entières de $-m'$ à m', excepté $m = 0$.

Si l'on groupe les facteurs deux à deux, on obtient la formule connue

$$\text{(6)} \qquad \sin z = z \cdot \prod_{m=1}^{m=\infty} \left(1 - \frac{z^2}{m^2\pi^2} \right).$$

125. Considérons encore la fonction

$$f(z) = \cos \frac{2\pi(z-h)}{\omega},$$

qui admet pour zéros $a = h + (2m+1)\frac{\omega}{4}$. Du point h comme

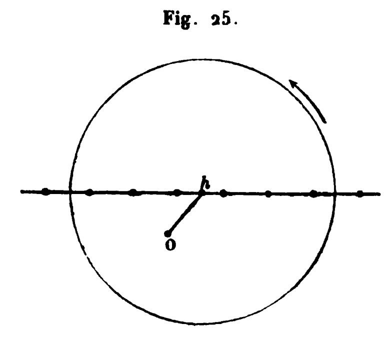


Fig. 25.

centre (*fig.* 25), avec un très-grand rayon égal à $(m'+1)\frac{\omega}{2}$, décrivons un cercle, et supposons l'intégration effectuée le long de ce cercle, nous aurons à étudier l'intégrale

$$-\frac{t}{\omega i}\int \frac{\tang \frac{2\pi(z-h)}{\omega}\, dz}{z}.$$

Posons $z = h + z'$, le point h étant l'origine de la nouvelle variable z'; l'intégrale devient

$$-\frac{t}{\omega i}\int \frac{\tang \frac{2\pi z'}{\omega}}{z'+h}\, dz' = -\frac{t}{\omega i}\int \frac{\tang \frac{2\pi z'}{\omega}}{z'}\left(1+\frac{h}{z'}\right)^{-1} dz',$$

et se réduit à

$$-\frac{t}{\omega i}\int \frac{\tang \frac{2\pi z'}{\omega}}{z'}\, dz';$$

mais cette dernière, ayant ses éléments symétriques égaux et de signes contraires, est nulle. On a donc

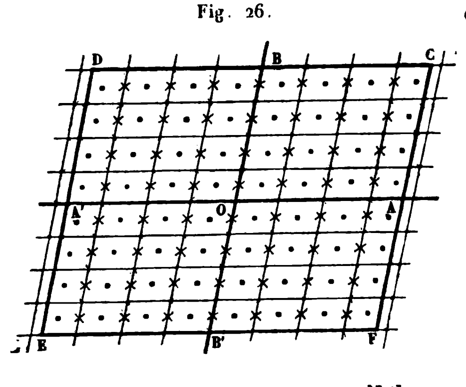
$$(7)\qquad \frac{\cos \frac{2\pi(z-h)}{\omega}}{\cos \frac{2\pi h}{\omega}} = \lim \prod_{m=-m'-1}^{m=m'} \left[1 - \frac{z}{h+(2m+1)\frac{\omega}{4}}\right].$$

Application à la fonction ν.

126. Nous allons nous occuper maintenant du développement des fonctions elliptiques. Nous commencerons par la fonction $\nu(z)$; cette fonction est paire; elle admet les zéros simples $a = (2m+1)\frac{\omega}{4} + (2n+1)\frac{\omega'}{2}$ et les infinis simples

$a = m\frac{\omega}{2} + (2n+1)\frac{\omega'}{2}$. A partir de l'origine, portons dans la direction de la première période, et de part et d'autre, une longueur OA, OA′ égale à $(m'+1)\frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{8}$; et de même dans la direction de la seconde période une longueur OB, OB′ égale à $(n'+1)\omega'$;

Fig. 26.



nous formerons ainsi un parallélogramme CDEF (*fig.* 26), suivant le contour duquel nous effectuerons l'intégration. L'intégrale

$$\frac{t}{2\pi i}\int \frac{\nu'(z)}{\nu(z)}\frac{dz}{z} = -\frac{k^2 t}{2\pi i}\int \frac{\lambda(z)\,\mu(z)}{z\,\nu(z)}\,dz,$$

ayant ses éléments égaux deux à deux et de signes contraires, est nulle. On a donc

$$(8)\qquad \nu(z) = \lim \prod \frac{1 - \dfrac{z}{(2m+1)\dfrac{\omega}{4} + (2n+1)\dfrac{\omega'}{2}}}{1 - \dfrac{z}{m\dfrac{\omega}{2} + (2n+1)\dfrac{\omega'}{2}}}.$$

Quelle que soit la manière dont on fasse augmenter m et n indéfiniment, ce produit tend vers la même limite $\nu(z)$. Si l'on considère ce produit comme le quotient de deux produits, formés, l'un par les facteurs du numérateur, l'autre par les facteurs du dénominateur, chacun de ces produits tendra vers une limite distincte; mais cette limite dépend de la manière dont on fait augmenter m et n indéfiniment. Nous supposons que l'on fasse augmenter indéfiniment, d'abord m, puis n; ce qui revient à grouper les zéros ou les infinis par files parallèles à la direction ω.

127. Examinons d'abord le produit des facteurs du numérateur, produit que nous représenterons par $\theta(z)$; nous posons

$$(9)\quad \theta(z) = \lim \prod_{n=-n'-1}^{n=n'} \prod_{m=-m'-1}^{m=m'} \left[1 - \frac{z}{(2m+1)\frac{\omega}{4} + (2n+1)\frac{\omega}{2}}\right].$$

Si dans la formule (7) on fait $h = (2n+1)\frac{\omega'}{2}$, il vient

$$\prod_{m=-m'-1}^{m=m'} \left[1 - \frac{z}{(2m+1)\frac{\omega}{4} + (2n+1)\frac{\omega'}{2}}\right]$$
$$= \frac{\cos\left[\frac{2\pi z}{\omega} - (2n+1)\pi\rho\right]}{\cos(2n+1)\pi\rho};$$

en substituant, on a

$$(10)\quad \theta(z) = \lim \prod_{n=-n'-1}^{n=n'} \frac{\cos\left[\frac{2\pi z}{\omega} - (2n+1)\pi\rho\right]}{\cos(2n+1)\pi\rho}.$$

Si l'on groupe les facteurs deux à deux, ce produit s'écrit

$$\theta(z) = \prod_{n=0}^{n=\infty} \frac{\cos\left[\frac{2\pi z}{\omega} + (2n+1)\pi\rho\right] \cos\left[\frac{2\pi z}{\omega} - (2n+1)\pi\rho\right]}{\cos^2(2n+1)\pi\rho},$$

ou, plus simplement,

$$(11)\quad \theta(z) = \prod_{n=0}^{n=\infty} \left[1 - \frac{\sin^2 \frac{2\pi z}{\omega}}{\cos^2(2n+1)\pi\rho}\right].$$

Sous cette dernière forme il est aisé de reconnaître la convergence. On a en effet

$$\cos(2n+1)\pi\rho = \frac{e^{(2n+1)\pi\rho i} + e^{-(2n+1)\pi\rho i}}{2};$$

si, dans le rapport des périodes, $\rho = r + si$, la quantité s est positive, on écrira

$$\cos(2n+1)\pi\rho = \frac{e^{-(2n+1)\pi\rho i}\left(1 + e^{2(2n+1)\pi\rho i}\right)}{2};$$

d'où

$$\lim \left[\frac{\sin^2 \frac{2\pi z}{\omega}}{\cos^2(2n+1)\pi\rho}\right]^{\frac{1}{n}} = e^{4\pi\rho i};$$

cette quantité ayant un module moindre que l'unité, le produit est convergent. Si la quantité s était négative, on trouverait pour limite $e^{-4\pi\rho i}$, et l'on arriverait à la même conclusion. Ainsi, dans tous les cas, la formule (11) définit une fonction synectique dans toute l'étendue du plan.

128. Considérons maintenant le produit des facteurs du dénominateur, produit que nous désignerons par θ_1. On a

$$(12) \qquad \theta_1(z) = \lim \prod_{n=-n'-1}^{n=n'} \prod_{m=-m'}^{m=m'} \left[1 - \frac{z}{m\frac{\omega}{2} + (2n+1)\frac{\omega'}{2}}\right].$$

Si dans la formule (7) on fait $h = -\frac{\omega}{4} + (2n+1)\frac{\omega'}{2}$, il vient

$$\lim \prod_{m=-m'-1}^{m=m'} \left[1 - \frac{z}{m\frac{\omega}{2} + (2n+1)\frac{\omega'}{2}}\right]$$

$$= \frac{\cos\left[\frac{2\pi z}{\omega} + \frac{\pi}{2} - (2n+1)\pi\rho\right]}{\cos\left[\frac{\pi}{2} - (2n+1)\pi\rho\right]}.$$

Il n'y a aucun inconvénient à remplacer par $-m'$ la limite inférieure, qui est ici $-m'-1$; ceci revient à négliger le facteur

$$1 + \frac{z}{(m'+1)\frac{\omega}{2} - (2n+1)\frac{\omega'}{2}},$$

qui tend vers l'unité, quand m' augmente indéfiniment. On a donc

$$(13) \qquad \theta_1(z) = \lim \prod_{n=-n'-1}^{n=n'} \frac{\cos\left[\frac{2\pi z}{\omega} + \frac{\pi}{2} - (2n+1)\pi\rho\right]}{\cos\left[\frac{\pi}{2} - (2n+1)\pi\rho\right]},$$

En groupant les facteurs deux à deux, on écrira

$$(14)\qquad \theta_1(z) = \prod_{n=0}^{n=\infty} \left[1 - \frac{\sin^2 \frac{2\pi z}{\omega}}{\sin^2(2n+1)\pi\rho} \right];$$

et l'on démontrera la convergence comme précédemment. Ainsi la fonction ν est exprimée par un quotient de deux fonctions synectiques,

$$(15)\qquad \nu(z) = \frac{\theta(z)}{\theta_1(z)}.$$

Application à la fonction μ.

129. La fonction paire $\mu(z)$ admet les zéros simples

$$z = (2m+1)\frac{\omega}{4} + n\omega',$$

et les mêmes infinis simples que la fonction $\nu(z)$. En intégrant le long d'un parallélogramme analogue au précédent, on verra de la même manière que l'intégrale

$$\frac{t}{2\pi i}\int \frac{\mu'(z)}{\mu(z)}\frac{dz}{z} = -\frac{t}{2\pi i}\int \frac{\lambda(z)\nu(z)}{z\mu(z)}dz$$

est nulle. On a donc

$$(16)\qquad \mu(z) = \lim \prod \frac{1 - \dfrac{z}{(2m+1)\frac{\omega}{4} + n\omega'}}{1 - \dfrac{z}{m\frac{\omega}{2} + (2n+1)\frac{\omega'}{2}}}.$$

Les facteurs du dénominateur forment la fonction $\theta_1(z)$; ceux du numérateur forment une nouvelle fonction synectique que nous appellerons $\theta_2(z)$,

$$(17)\qquad \theta_2(z) = \lim \prod_{n=-n'}^{n=n'} \prod_{m=-m'-1}^{m=m'} \left[1 - \frac{z}{(2m+1)\frac{\omega}{4} + n\omega'} \right].$$

Si dans la formule (7) on fait $h = n\omega'$, il vient

$$\prod_{m=-m'-1}^{m=m'} \left[1 - \frac{z}{(2m+1)\frac{\omega}{4} + n\omega'}\right] = \frac{\cos\left(\frac{2\pi z}{\omega} - 2n\pi\rho\right)}{\cos 2n\pi\rho},$$

et par suite

(18) $$\theta_2(z) = \lim \prod_{n=-n'}^{n=n'} \frac{\cos\left(\frac{2\pi z}{\omega} - 2n\pi\rho\right)}{\cos 2n\pi\rho},$$

ou, en groupant les facteurs deux à deux,

(19) $$\theta_2(z) = \cos\frac{2\pi z}{\omega} \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 - \frac{\sin^2\frac{2\pi z}{\omega}}{\cos^2 2n\pi\rho}\right).$$

Il en résulte

(20) $$\mu(z) = \frac{\theta_2(z)}{\theta_1(z)}.$$

Application à la fonction λ.

130. La fonction $\lambda(z)$ s'annulant pour $z = 0$, nous déduirons son développement de celui de la fonction $\frac{\lambda(z+z_0)}{\lambda(z_0)}$, dont les zéros sont $a = -z_0 + m\frac{\omega}{2} + n\omega'$. On aura ainsi au numérateur de $\lambda(z+z_0)$ la fonction

$$\lambda(z_0) \lim \prod_{n=-n'}^{n=n'} \prod_{m=-m'}^{m=m'} \left(1 - \frac{z}{-z_0 + m\frac{\omega}{2} + n\omega'}\right).$$

Si dans la formule (7) on fait $h = -z_0 - \frac{\omega}{4} + n\omega$, il vient

$$\lim \prod_{m=-m'-1}^{m=m'} \left(1 - \frac{z}{-z_0 + m\frac{\omega}{2} + n\omega'}\right)$$

$$= \frac{\cos\left[\frac{2\pi(z+z_0)}{\omega} + \frac{\pi}{2} - 2n\pi\rho\right]}{\cos\left(\frac{2\pi z_0}{\omega} + \frac{\pi}{2} - 2n\pi\rho\right)};$$

et, par suite, le numérateur prend la forme

$$\lambda(z_0)\lim\prod_{n=-n'}^{n=n'}\frac{\cos\left[\frac{2\pi(z+z_0)}{\omega}+\frac{\pi}{2}-2n\pi\rho\right]}{\cos\left(\frac{2\pi z_0}{\omega}+\frac{\pi}{2}-2n\pi\rho\right)}.$$

Nous supposerons le facteur $\lambda(z_0)$ joint à celui qui corresp à $n=0$. Faisons maintenant diminuer z_0 jusqu'à zéro: facteurs, qui correspondent à des valeurs de n différente zéro, deviennent

$$\frac{\cos\left(\frac{2\pi z}{\omega}+\frac{\pi}{2}-2n\pi\rho\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-2n\pi\rho\right)};$$

celui qui correspond à $n=0$, savoir

$$\frac{\lambda(z_0).\cos\left[\frac{2\pi(z+z_0)}{\omega}+\frac{\pi}{2}\right]}{\cos\left(\frac{2\pi z_0}{\omega}+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\lambda(z_0)}{-\sin\frac{2\pi z_0}{\omega}}\cos\left[\frac{2\pi(z+z_0)}{\omega}+\right.$$

se réduit à

$$\frac{\cos\left(\frac{2\pi z}{\omega}+\frac{\pi}{2}\right)}{-\frac{2\pi}{\omega}}.$$

Ainsi le numérateur de $\lambda(z)$ pourra être représenté par

$$(21)\qquad \theta_1(z)=\lim\prod_{n=-n'}^{n=n'}\frac{\cos\left(\frac{2\pi z}{\omega}+\frac{\pi}{2}-2n\pi\rho\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-2n\pi\rho\right)},$$

pourvu que l'on convienne que $\cos\left(\frac{\pi}{2}-2n\pi\rho\right)$, pour n au lieu d'être égal à zéro, sera égal à $-\frac{2\pi}{\omega}$.

En mettant à part le facteur $\frac{\omega}{2\pi}\sin\frac{2\pi z}{\omega}$, qui correspo $n=0$, et groupant les autres deux à deux, on aura

$$(22)\qquad \theta_1(z)=\frac{\omega}{2\pi}\sin\frac{2\pi z}{\omega}\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1-\frac{\sin^2\frac{2\pi z}{\omega}}{\sin^2 2n\pi\rho}\right).$$

131. En résumant ce qui précède, nous voyons que les trois fonctions elliptiques $\lambda(z)$, $\mu(z)$, $\nu(z)$ s'expriment à l'aide des quatre fonctions synectiques

$$
(\mathrm{I})\quad \left\{
\begin{aligned}
\theta(z) &= \prod_{n=0}^{n=\infty}\left[1-\frac{\sin^2\dfrac{2\pi z}{\omega}}{\cos^2(2n+1)\pi\rho}\right],\\
\theta_1(z) &= \prod_{n=0}^{n=\infty}\left[1-\frac{\sin^2\dfrac{2\pi z}{\omega}}{\sin^2(2n+1)\pi\rho}\right],\\
\theta_2(z) &= \cos\frac{2\pi z}{\omega}\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{2\pi z}{\omega}}{\cos^2 2n\pi\rho}\right),\\
\theta_3(z) &= \frac{\omega}{2\pi}\sin\frac{2\pi z}{\omega}\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{2\pi z}{\omega}}{\sin^2 2n\pi\rho}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Ces produits sont convergents dans tous les cas. Si l'on pose $q=e^{2\pi\rho i}$, en supposant $s>0$, on pourra les mettre sous la forme

$$
(\mathrm{II})\quad \left\{
\begin{aligned}
\theta(z) &= \prod_{n=0}^{n=\infty}\frac{1+2q^{2n+1}\cos\dfrac{4\pi z}{\omega}+q^{2(2n+1)}}{(1+q^{2n+1})^2},\\
\theta_1(z) &= \prod_{n=0}^{n=\infty}\frac{1-2q^{2n+1}\cos\dfrac{4\pi z}{\omega}+q^{2(2n+1)}}{(1-q^{2n+1})^2},\\
\theta_2(z) &= \cos\frac{2\pi z}{\omega}\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{1+2q^{2n}\cos\dfrac{4\pi z}{\omega}+q^{4n}}{(1+q^{2n})^2},\\
\theta_3(z) &= \frac{\omega}{2\pi}\sin\frac{2\pi z}{\omega}\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{1-2q^{2n}\cos\dfrac{4\pi z}{\omega}+q^{4n}}{(1-q^{2n})^2}.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces fonctions sont celles qui ont été trouvées par Abel et Jacobi, à des facteurs constants près. Mais nous préférons, pour étudier leurs propriétés, les conserver sous les formes (10), (13), (18), (21), sous lesquelles elles se sont présentées d'abord, et que nous écrivons de nouveau :

$$(\mathrm{III})\quad\left\{\begin{aligned}
\theta(z) &= \lim \prod_{n=-n'-1}^{n=n'} \frac{\cos\left[\dfrac{2\pi z}{\omega} - (2n+1)\pi\rho\right]}{\cos(2n+1)\pi\rho},\\
\theta_1(z) &= \lim \prod_{n=-n'-1}^{n=n'} \frac{\cos\left[\dfrac{2\pi z}{\omega} + \dfrac{\pi}{2} - (2n+1)\pi\rho\right]}{\cos\left[\dfrac{\pi}{2} - (2n+1)\pi\rho\right]},\\
\theta_2(z) &= \lim \prod_{n=-n'}^{n=n'} \frac{\cos\left(\dfrac{2\pi z}{\omega} - 2n\pi\rho\right)}{\cos 2n\pi\rho},\\
\theta_3(z) &= \lim \prod_{n=-n'}^{n=n'} \frac{\cos\left(\dfrac{2\pi z}{\omega} + \dfrac{\pi}{2} - 2n\pi\rho\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 2n\pi\rho\right)},
\end{aligned}\right.$$

en convenant que, dans cette dernière formule, le diviseur qui correspond à $n=0$, au lieu d'être nul, est égal à $-\frac{2\pi}{\omega}$.

Si, dans les deux dernières formules, on remplace l'indice inférieur $-n'$ par $-n'-1$, afin de le rendre le même que dans les deux premières, nous introduirons un facteur nouveau

$$\frac{\cos\left[\dfrac{2\pi z}{\omega} + 2(n'+1)\pi\rho\right]}{\cos 2(n'+1)\pi\rho} \quad \text{ou} \quad \frac{\cos\left[\dfrac{2\pi z}{\omega} + \dfrac{\pi}{2} + 2(n'+1)\pi\rho\right]}{\cos\left[\dfrac{\pi}{2} + 2(n'+1)\pi\rho\right]},$$

qui devient égal à $e^{-\frac{2\pi zi}{\omega}}$, quand n' augmente indéfiniment, la quantité s étant toujours supposée positive. On pourra donc

mettre les deux fonctions θ_2, θ_3 sous la forme

$$\text{(IV)}\quad \begin{cases} \theta_2(z) = e^{\frac{2\pi zi}{\omega}} \lim \displaystyle\prod_{n=-n'-1}^{n=n'} \dfrac{\cos\left(\dfrac{2\pi z}{\omega} - 2n\pi\rho\right)}{\cos 2n\pi\rho}, \\ \theta_3(z) = e^{\frac{2\pi zi}{\omega}} \lim \displaystyle\prod_{n=-n'-1}^{n=n'} \dfrac{\cos\left(\dfrac{2\pi z}{\omega} + \dfrac{\pi}{2} - 2n\pi\rho\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 2n\pi\rho\right)}. \end{cases}$$

En examinant les quatre fonctions θ, θ_1, θ_2, θ_3, telles que nous venons de les écrire, on reconnaît immédiatement qu'elles sont comprises dans la formule générale

$$\text{(V)}\quad \Theta(z)_{a,b} = e^{\frac{2b\pi zi}{\omega}} \lim \prod_{n=-n'-1}^{n=n'} \frac{\cos\left[\dfrac{2\pi z}{\omega} + a\dfrac{\pi}{2} - (2n+1-b)\pi\rho\right]}{\cos\left[a\dfrac{\pi}{2} - (2n+1-b)\pi\rho\right]},$$

quand on donne à chacun des deux indices a et b les deux valeurs 0 et 1. On a, en effet,

$$\theta = \Theta_{0,0}, \quad \theta_1 = \Theta_{1,0}, \quad \theta_2 = \Theta_{0,1}, \quad \theta_3 = \Theta_{1,1}.$$

Toutes les fonctions elliptiques s'expriment à l'aide de ces quatre fonctions, de la manière suivante :

$$\text{(VI)}\quad \begin{cases} \lambda(z) = \dfrac{\theta_3(z)}{\theta_1(z)}, & \mu(z) = \dfrac{\theta_2(z)}{\theta_1(z)}, \\ \nu(z) = \dfrac{\theta(z)}{\theta_1(z)}, & \varpi(z) = \dfrac{\theta_3(z)}{\theta_2(z)}, \\ \lambda\left(\dfrac{\omega}{4} - z\right) = \dfrac{\theta_2(z)}{\theta(z)}, & \mu\left(\dfrac{\omega}{4} - z\right) = k'\dfrac{\theta_3(z)}{\theta(z)}, \\ \nu\left(\dfrac{\omega}{4} - z\right) = k'\dfrac{\theta_1(z)}{\theta(z)}, & \varpi\left(\dfrac{\omega}{4} - z\right) = \dfrac{1}{k'}\dfrac{\theta_2(z)}{\theta_3(z)}. \end{cases}$$

CHAPITRE III.

PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION Θ.

---

132. Nous avons fait voir que l'on peut exprimer les fonctions elliptiques à l'aide de quatre fonctions synectiques comprises dans la forme générale

$$(1)\quad \Theta(z)_{a,b} = e^{\frac{2b\pi z i}{\omega}} \lim \prod_{n=-n'-1}^{n=n'} \frac{\cos\left[\frac{2\pi z}{\omega} + a\frac{\pi}{2} - (2n+1-b)\pi\rho\right]}{\cos\left[a\frac{\pi}{2} - (2n+1-b)\pi\rho\right]}.$$

Nous nous proposons actuellement d'étudier les propriétés de cette fonction Θ, qui dépend des deux indices entiers a et b.

Nous remarquons d'abord que toutes les valeurs entières des indices se ramènent aux deux valeurs 0 et 1. En effet, si l'on augmente l'indice a de deux unités, on augmente l'arc de π; les deux termes de la fraction changent de signe, et la fraction conserve la même valeur. On a donc

$$(2)\qquad \Theta_{a+2,b} = \Theta_{a,b}.$$

D'un autre côté, si l'on remplace b par $b+2$, on a

$$\Theta(z)_{a,b+2} = e^{\frac{2b\pi z i}{\omega}} e^{\frac{4\pi z i}{\omega}} \lim \prod_{n=-n'-1}^{n=n'} \frac{\cos\left[\frac{2\pi z}{\omega} + a\frac{\pi}{2} - (2n-1-b)\pi\rho\right]}{\cos\left[a\frac{\pi}{2} - (2n-1-b)\pi\rho\right]}.$$

On introduit ainsi dans le produit un facteur nouveau, celui qui correspond à $n = -n'-1$, et l'on supprime au contraire le facteur qui correspond à $n = n'$; le premier,

$$\frac{\cos\left[\frac{2\pi z}{\omega} + a\frac{\pi}{2} + (2n'+3+b)\pi\rho\right]}{\cos\left[a\frac{\pi}{2} + (2n'+3+b)\pi\rho\right]},$$

a pour limite $e^{\frac{-2\pi z i}{\omega}}$, quand n' augmente indéfiniment; le se-

cond,

$$\frac{\cos\left[\frac{2\pi z}{\omega}+a\frac{\pi}{2}-(2n'+1-b)\pi\rho\right]}{\cos\left[a\frac{\pi}{2}-(2n'+1-b)\pi\rho\right]},$$

a pour limite $e^{\frac{2\pi s i}{\omega}}$, en supposant toujours s positive. Par cette modification, le produit est multiplié par $e^{\frac{-4\pi s i}{\omega}}$; le facteur $e^{\frac{4\pi s i}{\omega}}$ étant introduit en avant, rien n'est changé dans l'expression, et l'on a

(3) $$\Theta_{a,b+2}=\Theta_{a,b}.$$

Ainsi la fonction Θ n'admet que quatre valeurs différentes, celles que nous avons examinées précédemment.

133. Sur les expressions (I) du nº **131**, on voit que les trois fonctions θ, θ_1, θ_2 sont paires, et se réduisent à l'unité pour $z=0$; la fonction θ_3 seule est impaire et s'évanouit avec z. Sa dérivée devient égale à 1 pour $z=0$. On a en général

(4) $$\Theta(-z)_{a,b}=(-1)^{a,b}\,\Theta(z)_{a,b}.$$

Les deux fonctions θ, θ_1 admettent la période $\frac{\omega}{2}$; les deux autres θ_2, θ_3 admettent la période ω, mais elles changent de signe quand on augmente z de $\frac{\omega}{2}$. On a en général

(5) $$\Theta\left(z+\frac{\omega}{2}\right)_{a,b}=(-1)^{b}\,\Theta(z)_{a,b}.$$

Si, dans la formule générale, on remplace z par $z+\omega'$, il vient

$$\Theta(z+\omega')=e^{\frac{2b\pi s i}{\omega}}e^{2b\pi\rho i}\prod_{n=-n'-1}^{n=n'}\frac{\cos\left[\frac{2\pi z}{\omega}+a\frac{\pi}{2}-(2n-1-b)\pi\rho\right]}{\cos\left[a\frac{\pi}{2}-(2n+1-b)\pi\rho\right]};$$

en divisant cette valeur de $\Theta(z+\omega')$ par celle de $\Theta(z)$, on

obtient

$$\frac{\Theta(z+\omega')}{\Theta(z)} = e^{2b\pi\rho i} \prod_{n=-n'-1}^{n=n'} \frac{\cos\left[\frac{2\pi z}{\omega}+a\frac{\pi}{2}-(2n-1-b)\pi\rho\right]}{\cos\left[\frac{2\pi z}{\omega}+a\frac{\pi}{2}-(2n+1-b)\pi\rho\right]};$$

et, en supprimant les facteurs communs,

$$\frac{\Theta(z+\omega')}{\Theta(z)} = e^{2b\pi\rho i} \times \frac{\cos\left[\frac{2\pi z}{\omega}+a\frac{\pi}{2}+(2n'+3+b)\pi\rho\right]}{\cos\left[\frac{2\pi z}{\omega}+a\frac{\pi}{2}-(2n'+1-b)\pi\rho\right]}.$$

Ce multiplicateur a pour limite $(-1)^a e^{-2(b+1)\pi\rho i} e^{\frac{-4\pi z i}{\omega}}$, quand n' augmente indéfiniment ; on a donc

$$(6) \qquad \Theta(z+\omega')_{a,b} = (-1)^a e^{-2\pi\rho i} e^{\frac{-4\pi z i}{\omega}} \Theta(z)_{a,b},$$

ou bien

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\theta(z+\omega')}{\theta(z)} = \dfrac{\theta_1(z+\omega')}{-\theta_1(z)} = \dfrac{\theta_2(z+\omega')}{\theta_2(z)} = \dfrac{\theta_3(z+\omega')}{-\theta_3(z)} \\ \qquad = e^{-2\pi\rho i} e^{-\frac{4\pi}{\omega}}. \end{array} \right.$$

On voit par là que les fonctions Θ n'admettent pas la seconde période ω', mais que lorsque l'on ajoute ω' à la variable, chacune d'elles se reproduit multipliée par une exponentielle.

134. Si, dans la première et la troisième des formules (III) du n° 131, on remplace z par $z+\frac{\omega}{4}$, on a

$$\theta\left(z+\frac{\omega}{4}\right) = \lim \prod_{n=-n'-1}^{n=n'} \frac{\cos\left[\frac{2\pi z}{\omega}+\frac{\pi}{2}-(2n+1)\pi\rho\right]}{\cos(2n+1)\pi\rho},$$

$$\theta_2\left(z+\frac{\omega}{4}\right) = \lim \prod_{n=-n'}^{n=n'} \frac{\cos\left(\frac{2\pi z}{\omega}+\frac{\pi}{2}-2n\pi\rho\right)}{\cos 2n\pi\rho}.$$

En comparant ces deux expressions à la deuxième et à la qua-

trième formules, on voit que les rapports

$$\frac{\theta\left(z+\frac{\omega}{4}\right)}{\theta_1(z)}, \quad \frac{\theta_2\left(z+\frac{\omega}{4}\right)}{-\theta_3(z)}$$

sont constants. On obtient leurs valeurs en faisant $z=0$ ou $z=-\frac{\omega}{4}$, ce qui donne pour le premier $\theta\left(\frac{\omega}{4}\right)$ ou $\frac{1}{\theta_1\left(\frac{\omega}{4}\right)}$, pour le second $\frac{1}{\theta_3\left(\frac{\omega}{4}\right)}$. D'ailleurs, les quantités $\theta_1\left(\frac{\omega}{4}\right)$, $\theta_3\left(\frac{\omega}{4}\right)$ sont égales entre elles, puisque $\lambda\left(\frac{\omega}{4}\right)=1$. D'un autre côté, on a

$$\nu\left(\frac{\omega}{4}\right)=\frac{\theta\left(\frac{\omega}{4}\right)}{\theta_1\left(\frac{\omega}{4}\right)}=\theta^2\left(\frac{\omega}{4}\right)=k';$$

il en résulte

(8) $$\theta\left(\frac{\omega}{4}\right)=\frac{1}{\theta_1\left(\frac{\omega}{4}\right)}=\frac{1}{\theta_3\left(\frac{\omega}{4}\right)}=\sqrt{k'}.$$

On a donc

$$\frac{\theta\left(z+\frac{\omega}{4}\right)}{\theta_1(z)}=\frac{\theta_2\left(z+\frac{\omega}{4}\right)}{-\theta_3(z)}=\sqrt{k'},$$

ou bien

(9) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{\theta\left(\frac{\omega}{4}-z\right)}{\theta_1(z)}=\frac{\theta_2\left(\frac{\omega}{4}-z\right)}{\theta_3(z)}=\sqrt{k'},\\ &\frac{\theta_1\left(\frac{\omega}{4}-z\right)}{\theta(z)}=\frac{\theta_3\left(\frac{\omega}{4}-z\right)}{\theta_2(z)}=\frac{1}{\sqrt{k'}}.\end{aligned}\right.$$

Ainsi quand on remplace z par son complément $\frac{\omega}{4}-z$, les fonctions θ et θ_1, θ_2 et θ_3, se permutent l'une dans l'autre à un facteur constant près.

135. En remplaçant de même, dans les deux premières des

formules (III) du n° 131, z par $z+\frac{\omega'}{2}$, on a

$$\theta\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=\lim\prod_{n=-n'-1}^{n=n'}\frac{\cos\left(\frac{2\pi z}{\omega}-2n\pi\rho\right)}{\cos(2n+1)\pi\rho},$$

$$\theta_1\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=\lim\prod_{n=-n'-1}^{n=n'}\frac{\cos\left(\frac{2\pi z}{\omega}+\frac{\pi}{2}-2n\pi\rho\right)}{\cos\left[\frac{\pi}{2}-(2n+1)\pi\rho\right]};$$

en comparant ces expressions aux formules (IV) du même numéro, on voit que les rapports

$$\frac{\theta\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)}{e^{-\frac{2\pi zi}{\omega}}\theta_2(z)},\quad \frac{\theta_1\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)}{e^{-\frac{2\pi zi}{\omega}}\theta_3(z)}$$

sont constants. Si l'on fait

$$z=0\quad\text{ou}\quad z=-\frac{\omega'}{2},$$

on trouve, pour le premier rapport,

$$\theta\left(\frac{\omega'}{2}\right)\quad\text{ou}\quad\frac{e^{-\pi\rho i}}{\theta_2\left(\frac{\omega'}{2}\right)},$$

pour le second,

$$\frac{e^{-\pi\rho i}}{-\theta_3\left(\frac{\omega'}{2}\right)}.$$

La relation

$$\varpi\left(\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{\theta_3\left(\frac{\omega'}{2}\right)}{\theta_2\left(\frac{\omega'}{2}\right)}=i$$

donne

$$\theta_3\left(\frac{\omega'}{2}\right)=i\theta_2\left(\frac{\omega'}{2}\right).$$

D'un autre côté, si dans la formule

$$\lambda\left(\frac{\omega}{4}-z\right)=\frac{\theta_1(z)}{\theta(z)}.$$

on fait

$$z = -\frac{\omega'}{2},$$

il vient

$$\lambda\left(\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}\right) = \frac{\theta_2\left(\frac{\omega'}{2}\right)}{\theta\left(\frac{\omega'}{2}\right)} = \frac{e^{-\pi\rho i}}{\theta^2\left(\frac{\omega'}{2}\right)} = \frac{1}{k};$$

d'où

$$(10)\quad \begin{cases} \theta\left(\frac{\omega'}{2}\right) = \sqrt{k}.e^{-\frac{\pi}{2}\rho i}, \\ \theta_2\left(\frac{\omega'}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}}e^{-\frac{\pi}{2}\rho i}, \\ \theta_3\left(\frac{\omega'}{2}\right) = \frac{i}{\sqrt{k}}e^{-\frac{\pi}{2}\rho i}. \end{cases}$$

Il en résulte les relations suivantes :

$$(11)\quad \frac{\theta\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)}{\theta_2(z)} = \frac{\theta_1\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)}{i\theta_3(z)} = \sqrt{k}.e^{-\frac{\pi}{2}\rho i}e^{-\frac{2\pi z}{\omega}i}.$$

En remplaçant z par $z - \frac{\omega'}{2}$ dans les formules (7) et (11), on a

$$\frac{\theta_2\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)}{\theta_2\left(z - \frac{\omega'}{2}\right)} = \frac{\theta_3\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)}{-\theta_3\left(z - \frac{\omega'}{2}\right)} = e^{-\frac{4\pi z i}{\omega}},$$

$$\frac{\theta(z)}{\theta_2\left(z - \frac{\omega'}{2}\right)} = \frac{\theta_1(z)}{i\theta_3\left(z - \frac{\omega'}{2}\right)} = \sqrt{k}e^{\frac{\pi}{2}\rho i}e^{-\frac{2\pi z i}{\omega}}.$$

On déduit de là

$$(12)\quad \frac{\theta_2\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)}{\theta(z)} = \frac{\theta_3\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)}{i\theta_1(z)} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}\rho i}}{\sqrt{k}}e^{-\frac{2\pi z i}{\omega}}.$$

Ainsi, quand on ajoute $\frac{\omega'}{2}$ à la variable, les deux fonctions θ et θ_2, θ_1 et θ_3 se permutent l'une dans l'autre à une exponentielle près.

Il résulte de ce qui précède que les quatre fonctions θ peuvent être ramenées à une seule d'entre elles, par exemple à la fonction θ. On a, en effet, en vertu des formules que nous venons de démontrer,

$$(13)\quad \begin{cases} \theta_1(z) = \dfrac{1}{\sqrt{k'}}\,\theta\left(\dfrac{\omega}{4} - z\right), \quad \theta_2(z) = \dfrac{1}{\sqrt{k}}\, e^{\frac{\pi}{2}\rho i}\, e^{-\frac{2\pi z}{\omega} i}\,\theta\left(\dfrac{\omega'}{2} - z\right), \\ \theta_3(z) = \dfrac{i}{\sqrt{kk'}}\, e^{\frac{\pi}{2}\rho i}\, e^{-\frac{2\pi z i}{\omega}}\,.\,\theta\left(\dfrac{\omega}{4} + \dfrac{\omega'}{2} - z\right). \end{cases}$$

136. On en déduit aisément des formules qui permettent de calculer le module k et la période ω en fonction du rapport ρ des périodes. En vertu de la première des équations (10) et des formules (II) du n° **131**, on obtient le module

$$(14)\qquad \sqrt{k} = \sqrt[4]{q}\,.\,\theta\left(\frac{\omega'}{2}\right) = 2\sqrt[4]{q}\left[\prod_{n=0}^{n=\infty} \frac{1+q^{2(n+1)}}{1+q^{2n+1}}\right]^2.$$

La première formule (8) fournit de même le module complémentaire

$$(15)\qquad \sqrt{k'} = \theta\left(\frac{\omega}{4}\right) = \left[\prod_{n=0}^{n=\infty} \frac{1-q^{2n+1}}{1+q^{2n+1}}\right]^2.$$

La troisième des formules (8) donne ensuite

$$\frac{1}{\sqrt{k'}} = \theta_3\left(\frac{\omega}{4}\right) = \frac{\omega}{2\pi}\left[\prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n}}\right]^2;$$

d'où l'on déduit la valeur de la première période

$$(16)\qquad \frac{\omega}{2\pi} = \left[\prod_{n=0}^{n=\infty} \frac{1+q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\cdot\frac{1-q^{2(n+1)}}{1+q^{2(n+1)}}\right]^2.$$

Cette dernière expression peut être simplifiée ; le facteur $1-q^{2(n+1)}$, suivant que n est pair ou impair, est de la forme

$$1-q^{2(2n'+1)} \quad \text{ou} \quad 1-q^{4(n'+1)},$$

n' recevant toutes les valeurs entières. On peut écrire

$$\frac{\omega}{2\pi} = \left[\prod_{n=0}^{n=\infty} \frac{(1+q^{2n+1})[1-q^{2(n+1)}](1-q^{4(n+1)})}{(1-q^{2n+1})(1+q^{2(n+1)})} \right]^2,$$

d'où

$$\frac{\omega}{2\pi} = \left[\prod_{n=0}^{n=\infty} (1+q^{2n+1})^2 (1-q^{2(n+1)}) \right]^2,$$

et par suite

$$\sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} = \prod_{n=0}^{n=\infty} (1+q^{2n+1})^2 [1-q^{2(n+1)}].$$

On a aussi, en combinant les relations précédentes,

$$\sqrt{\frac{k'\omega}{2\pi}} = \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{1-q^n}{1+q^n}, \quad \sqrt{\frac{k\omega}{2\pi}} = 2\sqrt[4]{q} \prod_{n=0}^{n=\infty} \frac{1-q^{4(n+1)}}{1-q^{2(2n+1)}},$$

$$\sqrt{kk'\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^3} = 2\sqrt[4]{q} \prod_{n=0}^{n=\infty} [1-q^{2(2n+1)}]^3.$$

Autres manières de décomposer les fonctions elliptiques en quotients de fonctions synectiques.

137. Dans le chapitre précédent, après avoir exprimé les fonctions elliptiques par des produits d'un nombre infini de facteurs, nous avons évalué séparément le produit des facteurs du numérateur et celui des facteurs du dénominateur, en faisant augmenter indéfiniment d'abord m, puis n, ce qui revient, comme nous l'avons dit, à grouper les facteurs par files parallèles à la première période ω. Nous serions arrivés à d'autres fonctions synectiques en faisant croître indéfiniment, d'abord n, puis m ; ce qui revient à grouper les facteurs par files parallèles à la seconde période ω'.

La formule (7) du n° 125, dans laquelle on remplace ω par $2\omega'$, devient

$$\frac{\cos\frac{\pi(z-h)}{\omega'}}{\cos\frac{\pi h}{\omega'}} = \lim \prod_{n=-n'-1}^{n=n'} \left[1 - \frac{z}{h+(2n+1)\frac{\omega'}{2}} \right];$$

si l'on donne successivement à h les valeurs

$$(2m+1)\frac{\omega}{4},\quad m\frac{\omega}{2},\quad -\frac{\omega'}{2}+(2m+1)\frac{\omega}{4},\quad -z_0-\frac{\omega'}{2}+$$

on obtient quatre nouvelles fonctions synectiques que nou tinguerons des premières par un accent

$$\theta^{(1)} = \lim \prod_{m=-m'-1}^{m=m'} \frac{\cos\left[\frac{\pi z}{\omega'} - \frac{(2m+1)\pi}{4\rho}\right]}{\cos\frac{(2m+1)\pi}{4\rho}}$$

$$= \prod_{m=0}^{m=\infty}\left[1 - \frac{\sin^2\frac{\pi z}{\omega'}}{\cos^2\frac{(2m+1)\pi}{4\rho}}\right],$$

$$\theta_1^{(1)} = \lim \prod_{m=-m'}^{m=m'} \frac{\cos\left(\frac{\pi z}{\omega'} - \frac{m\pi}{2\rho}\right)}{\cos\frac{m\pi}{2\rho}}$$

$$= \cos\frac{\pi z}{\omega'}\prod_{1}^{\infty}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{\pi z}{\omega'}}{\cos^2\frac{m\pi}{2\rho}}\right),$$

$$\theta_2^{(1)} = \lim \prod_{m=-m'-1}^{m=m'} \frac{\cos\left[\frac{\pi z}{\omega'} + \frac{\pi}{2} - \frac{(2m+1)\pi}{4\rho}\right]}{\cos\left[\frac{\pi}{2} - \frac{(2m+1)\pi}{4\rho}\right]}$$

$$= \prod_{m=0}^{m=\infty}\left[1 - \frac{\sin^2\frac{\pi z}{\omega'}}{\sin^2\frac{(2m+1)\pi}{4\rho}}\right];$$

$$\theta_3^{(1)} = \lim \prod_{m=-m'}^{m=m'} \frac{\cos\left(\frac{\pi z}{\omega'} + \frac{\pi}{2} - \frac{m\pi}{2\rho}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{m\pi}{2\rho}\right)}$$

$$= \frac{\omega'}{\pi}\sin\frac{\pi z}{\omega'}\prod_{m=1}^{m=\infty}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{\pi z}{\omega'}}{\sin^2\frac{m\pi}{4\rho}}\right).$$

Dans cette dernière, on fait la convention d'attribuer à $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{m\pi}{2\rho}\right)$ pour $m=0$ la valeur $-\frac{\pi}{\omega'}$.

Supposant toujours la quantité s positive, nous mettrons la seconde et la quatrième sous la forme

$$\theta_1^{(1)} = e^{-\frac{\pi s i}{\omega'}} \lim \prod_{m=-m'-1}^{m=m'} \frac{\cos\left(\frac{\pi z}{\omega'}-\frac{m\pi}{2\rho}\right)}{\cos\frac{m\pi}{2\rho}},$$

$$\theta_3^{(1)} = e^{-\frac{\pi s i}{\omega'}} \lim \prod_{m=-m'-1}^{m=m'} \frac{\cos\left(\frac{\pi z}{\omega'}+\frac{\pi}{2}-\frac{m\pi}{2\rho}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{m\pi}{2\rho}\right)},$$

et nous les comprendrons dans la formule générale

$$\Theta^{(1)}(z)_{a,b} = e^{-\frac{b\pi s i}{\omega'}} \lim \prod_{m=-m'-1}^{m=m'} \frac{\cos\left[\frac{\pi z}{\omega'}+a\frac{\pi}{2}-\frac{(2m+1-b)\pi}{4\rho}\right]}{\cos\left[a\frac{\pi}{2}-\frac{(2m+1-b)\pi}{4\rho}\right]}.$$

On a

$$\theta^{(1)} = \Theta_{0,0}^{(1)}, \quad \theta_1^{(1)} = \Theta_{0,1}^{(1)}, \quad \theta_2^{(1)} = \Theta_{1,0}^{(1)}, \quad \theta_3^{(1)} = \Theta_{1,1}^{(1)}.$$

Dans l'expression des fonctions elliptiques au moyen des fonctions Θ ou $\Theta^{(1)}$, on peut remarquer que les deux indices a et b se trouvent permutés.

La fonction $\Theta^{(1)}$ jouit de propriétés analogues à celles de la fonction Θ. On a

$$\Theta^{(1)}(-z)_{a,b} = (-1)^{ab}\Theta^{(1)}(z)_{a,b},$$

$$\Theta^{(1)}(z+\omega')_{a,b} = (-1)^{b}\,\Theta^{(1)}(z)_{a,b},$$

$$\Theta^{(1)}\left(z+\frac{\omega}{2}\right)_{a,b} = (-1)^{a}\, e^{\frac{\pi i}{2\rho}}\, e^{\frac{2\pi s i}{\omega'}}\, \Theta^{(1)}(z)_{a,b}.$$

138. On peut ramener les unes aux autres les fonctions Θ et $\Theta^{(1)}$. Nous remarquons d'abord que la fonction paire

$$f(z) = \frac{\Theta^{(1)}(z)_{b,a}}{\Theta(z)_{a,b}},$$

ne devient ni nulle, ni infinie, pour aucune valeur finie de z et se réduit à l'unité $z = 0$. On a, en vertu des relations établies précédemment,

$$f\left(z+\frac{\omega}{2}\right) = e^{\frac{\pi i}{2\rho}} e^{\frac{2\pi s i}{\omega'}} f(z),$$

$$f(z+\omega') = e^{2\pi\rho i} e^{\frac{4\pi s i}{\omega}} f(z).$$

On en déduit

$$\frac{d.\log f\left(z+\frac{\omega}{2}\right)}{dz} = \frac{2\pi i}{\omega'} + \frac{d.\log f(z)}{dz},$$

$$\frac{d.\log f(z+\omega')}{dz} = \frac{4\pi i}{\omega} + \frac{d.\log f(z)}{dz},$$

et, par suite,

$$\frac{d^2 \log f\left(z+\frac{\omega}{2}\right)}{dz^2} = \frac{d^2 \log f(z)}{dz^2},$$

$$\frac{d^2 \log f(z+\omega')}{dz^2} = \frac{d^2 \log f(z)}{dz^2};$$

les fonctions

$$\frac{d \log f(z)}{dz} = \frac{f'(z)}{f(z)}, \quad \frac{d^2 \log f(z)}{dz^2} = \frac{f(z)f''(z) - f'^2(z)}{[f(z)]^2},$$

sont monodromes, comme la fonction $f(z)$; la dernière admet les deux périodes $\frac{\omega}{2}$, ω'; mais cette fonction doublement périodique, n'ayant pas d'infini dans le parallélogramme des périodes, puisque la fonction $f(z)$ ne devient ni nulle ni infinie, pour aucune valeur finie de z, est une constante, et l'on a

$$\frac{d^2 \log f(z)}{dz^2} = \alpha,$$

d'où

$$\frac{d \log f(z)}{dz} = \alpha z + \beta.$$

La constante β est nulle puisque la fonction $f'(z)$ est impaire. Quant à la constante α, on la déterminera en remar-

quant que l'accroissement $\alpha\frac{\omega}{2}$ ou $\alpha\omega'$ de la fonction $\frac{d\log f(z)}{dz}$, pour un accroissement $\frac{\omega}{2}$ ou ω' donné à la variable z, doit être égal à $\frac{2\pi i}{\omega'}$ ou à $\frac{4\pi i}{\omega}$, ce qui fait $\alpha=\frac{4\pi i}{\omega\omega'}$.

On a donc

$$\frac{d\log f(z)}{dz}=\frac{4\pi zi}{\omega\omega'},$$

et, par suite,

$$f(z)=e^{\frac{2\pi z^2 i}{\omega\omega'}};$$

d'où

$$(18)\qquad \Theta^{(1)}(z)_{b,a}=e^{\frac{2\pi z^2 i}{\omega\omega'}}\,\Theta(z)_{a,b}.$$

139. Il existe une relation très-remarquable entre les fonctions Θ, qui correspondent à des modules complémentaires k et k'. Nous avons vu (n° **107**) que, si l'on appelle ω et ω' deux périodes elliptiques de la fonction $\lambda(z,k)$, la fonction $\lambda(z,k')$ admet les périodes elliptiques $-2\omega' i$, $\frac{\omega i}{2}$, dont le rapport est $-\frac{1}{4\rho}$. La formule (1) devient

$$\Theta(z,k')_{a,b}=e^{-\frac{b\pi z}{\omega'}}\lim\prod_{n=-n'-1}^{n=n'}\frac{\cos\left(\frac{\pi z}{\omega' i}+a\frac{\pi}{2}-(2n+1-b)\frac{\pi}{4\rho}\right)}{\cos\left(a\frac{\pi}{2}-(2n+1-b)\frac{\pi}{4\rho}\right)};$$

en la comparant à la formule (17) on voit que

$$(19)\qquad \Theta(iz,k')_{a,b}=\Theta^{(1)}(z,k)_{a,b}.$$

Nous avons groupé les facteurs par files parallèles à la direction ω ou à la direction ω'; on peut encore les grouper d'une infinité d'autres manières, ce qui conduit à de nouvelles fonctions synectiques. Imaginons en effet que l'on remplace les deux périodes ω et ω' par d'autres périodes ω_1 et ω'_1 formant un parallélogramme élémentaire et que l'on groupe les facteurs par files parallèles à l'une des périodes ω_1 ou ω'_1, nous

obtiendrons de nouvelles fonctions synectiques différentes des premières. Mais toutes ces fonctions se ramènent à la fonction Θ, comme nous allons voir.

Équations différentielles auxquelles satisfont les fonctions Θ.

140. Reprenons la relation (6)

$$\Theta(z+\omega') = e^{a\pi i} e^{-2\pi\rho i} e^{-\frac{4\pi si}{\omega}} \Theta(z).$$

En prenant les logarithmes, et différentiant, on a

$$\frac{d \log \Theta(z+\omega')}{dz} = -\frac{4\pi i}{\omega} + \frac{d.\log\Theta(z)}{dz}.$$

La fonction monodrome $\frac{d\log\Theta(z)}{dz}$ ou $\frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)}$ est impaire; elle admet la période $\frac{\omega}{2}$, et, quand on ajoute ω' à la variable, elle éprouve un accroissement constant $-\frac{4\pi i}{\omega}$. En différentiant une seconde fois, nous aurons

$$\frac{d^2\log\Theta(z+\omega')}{dz^2} = \frac{d^2\log\Theta(z)}{dz^2}.$$

Ainsi la fonction monodrome $\frac{d^2\log\Theta(z)}{dz^2}$ ou $\frac{\Theta\Theta''-\Theta'^2}{\Theta^2}$ admet la seconde période ω'. C'est une fonction paire doublement périodique du second ordre; le parallélogramme élémentaire, formé sur les deux périodes $\frac{\omega}{2}$, ω', est la moitié du parallélogramme relatif à la fonction λ; elle admet comme infini double, dans chaque parallélogramme élémentaire, le zéro de la fonction Θ situé dans ce parallélogramme. On pourra donc l'exprimer aisément au moyen de celle des fonctions λ^2, $\frac{1}{\lambda^2}$, $\frac{1}{\mu^2}$, $\frac{1}{\nu^2}$, qui, ayant les mêmes périodes, admet le même infini double. Si, par exemple, on considère la fonction θ_1, on aura

$$\frac{d^2\log\theta_1(z)}{dz^2} = A\lambda^2(z) + B.$$

On peut déterminer les coefficients par les considérations suivantes.

141. Les fonctions elliptiques λ, μ, ν sont définies par les équations différentielles

$$\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2 = (1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2) = 1-(1+k^2)\lambda^2 + k^2\lambda^4,$$

$$\left(\frac{d\mu}{dz}\right)^2 = (1-\mu^2)(k'^2+k^2\mu^2) = k'^2 + (k^2-k'^2)\mu^2 - k^2\mu^4,$$

$$\left(\frac{d\nu}{dz}\right)^2 = (1-\nu^2)(\nu^2-k'^2) = -k'^2 + (1+k'^2)\nu^2 - \nu^4,$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\left(\frac{d\log\lambda}{dz}\right)^2 = -(1+k^2) + \frac{1}{\lambda^2} + k^2\lambda^2,$$

$$\left(\frac{d\log\mu}{dz}\right)^2 = (k^2-k'^2) + \frac{k'^2}{\mu^2} - k^2\mu^2,$$

$$\left(\frac{d\log\nu}{dz}\right)^2 = (1+k'^2) - \frac{k'^2}{\nu^2} - \nu^2.$$

En différentiant, on obtient les équations du second ordre

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\log\lambda}{dz^2} = k^2\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2},\\ &\frac{d^2\log\mu}{dz^2} = -k^2\mu^2 - \frac{k'^2}{\mu^2} = k^2\lambda^2 - \frac{k'^2}{\mu^2} - k^2,\\ &\frac{d^2\log\nu}{dz^2} = -\nu^2 + \frac{k'^2}{\nu^2} = k^2\lambda^2 + \frac{k'^2}{\nu^2} - 1.\end{aligned}\right.$$

Si dans les premiers membres on remplace λ, μ, ν par leurs valeurs au moyen des fonctions Θ, ces équations deviennent

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\log\theta(z)}{dz^2} - \frac{k'^2}{\nu^2(z)} + 1 = \frac{d^2\log\theta_1(z)}{dz^2} + k^2\lambda^2(z)\\ &= \frac{d^2\log\theta_2(z)}{dz^2} + \frac{k'^2}{\mu^2(z)} + k^2 = \frac{d^2\log\theta_3(z)}{dz^2} + \frac{1}{\lambda^2(z)} = \alpha.\end{aligned}\right.$$

Ces quatre quantités égales, étant des fonctions doublement périodiques qui n'ont pas les mêmes infinis, sont égales à un même constante α.

En faisant $z=0$, on obtient la valeur de cette constante

(22) $$\alpha=\theta''(0)+k^2=\theta''_1(0)=\theta''_2(0)+1.$$

142. De quelque façon que l'on prenne les fonctions Θ, elles satisferont toujours aux équations différentielles (21); seulement la valeur de la constante α changera. On peut donc considérer les fonctions Θ, que nous avons étudiées jusqu'à présent, comme des intégrales particulières des équations (21); les intégrales générales sont

$$e^{\frac{\alpha z^2}{2}+\beta z+\gamma}\Theta(z)_{a,b},$$

β, γ étant des constantes arbitraires.

143. Voici encore une propriété de la fonction Θ qu'il est bon de remarquer. La fonction monodrome paire

$$f(z)=\frac{\Theta(\alpha+z)\Theta(\alpha-z)}{\Theta^2(\alpha)\Theta^2(z)}$$

est doublement périodique, aux périodes $\frac{\omega}{2}$ et ω'; elle admet comme infinis doubles les zéros de $\Theta(z)$; on l'exprimera au moyen de celle des fonctions λ^2, $\frac{1}{\lambda^2}$, $\frac{1}{\mu^2}$, $\frac{1}{\nu^2}$ qui admet le même infini double; il faut prendre la fonction Θ avec les mêmes indices au numérateur; mais les indices de $\Theta(z)$ au dénominateur pourront différer des premiers.

On aura, par exemple,

(23) $$\frac{\theta_3(\alpha+z)\theta_3(\alpha-z)}{\theta_3^2(\alpha)\theta_1^2(z)}=1-\frac{\lambda^2(z)}{\lambda^2(\alpha)},$$

la fonction devant s'annuler pour $z=\pm\alpha$, et se réduire à l'unité par $z=0$.

On aura, de même,

(24) $$\frac{\theta_1(\alpha+z)\theta_1(\alpha-z)}{\theta_1^2(\alpha)\theta_1^2(z)}=1-k^2\lambda^2(\alpha)\lambda^2(z).$$

CHAPITRE IV.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS ELLIPTIQUES EN SÉRIES CIRCULAIRES.

Développement de la fonction Θ.

144. Si l'on pose $t = e^{\frac{2\pi z i}{\omega}}$, la fonction Θ, admettant la période ω, est monodrome par rapport à t; d'ailleurs elle conserve une valeur finie pour toutes les valeurs de t, excepté pour $t = 0$ et $t = \infty$; en vertu du théorème II (n° 30), elle se développe en une double série convergente suivant les puissances entières, positives et négatives de t.

Quand on remplace z par $z + \frac{\omega}{2}$, on change le signe de t. La relation

$$\Theta\left(z + \frac{\omega}{2}\right)_{a,b} = (-1)^b \Theta(z)_{a,b},$$

démontrée au n° 133, fait voir que la fonction Θ ne change pas si b est pair, et change de signe si b est impair. Dans le premier cas, la série ne contiendra que les puissances paires de t, dans le second cas que les puissances impaires.

Cette série sera donc de la forme

$$\Theta(z)_{a,b} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} A^{(m)} e^{(2m+b)\frac{2\pi z i}{\omega}}.$$

145. Il s'agit de déterminer les coefficients $A^{(m)}$. Si l'on remplace z par $z + \omega'$, il vient

$$\Theta(z + \omega')_{a,b} = e^{(2m+b)2\pi\rho i} \sum A^{(m)} e^{(2m+b)\frac{2\pi z i}{\omega}}.$$

De la relation

$$\Theta(z + \omega')_{a,b} = (-1)^a e^{-2\pi\rho i} e^{-\frac{4\pi z i}{\omega}} \Theta(z)_{a,b},$$

démontrée au même numéro, on déduit

$$\Theta(z+\omega')_{a,b} = (-1)^a e^{-2\pi\rho i} \sum A^{(m)} e^{[2(m-1)+b]\frac{2\pi z i}{\omega}},$$

$$= (-1)^a e^{-2\pi\rho i} \sum A^{(m+1)} e^{(2m+b)\frac{2\pi z i}{\omega}};$$

la comparaison des deux valeurs conduit à la relation

$$A^{(m+1)} = (-1)^a e^{(2m+1+b)2\pi\rho i} A^{(m)}.$$

En donnant successivement à m les valeurs $0, 1, 2, \ldots, m-1$, on a

$$A' = (-1)^a e^{(1+b)2\pi\rho i} A,$$

$$A'' = (-1)^a e^{(3+b)2\pi\rho i} A',$$

. . . .

. . . .

$$A^{(m)} = (-1)^a e^{(2m-1+b)2\pi\rho i} A^{(m-1)};$$

d'où l'on déduit, par la multiplication,

$$A^{(m)} = (-1)^{am} e^{(m^2+mb)2\pi\rho i} A.$$

On obtient ainsi l'expression

$$\Theta(z)_{a,b} = A \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (-1)^{am} e^{2\pi i\left[(2m+b)\frac{z}{\omega} + (m^2+mb)\rho\right]},$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$(1)\quad \Theta(z)_{a,b} = A_{a,b}(-1)^{-\frac{a^2 b}{2}} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (-1)^{am} e^{2\pi i\left[(2m+b)\frac{z}{\omega} + (2m+b)^2\frac{\rho}{4}\right]}.$$

Nous avons affecté la constante A, c'est-à-dire le coefficient du terme correspondant à $m=0$, des deux indices a et b, parce que la valeur de ce coefficient dépend de ces deux indices, et nous avons compris dans cette constante le facteur

$$(-1)^{\frac{a^2 b}{2}} e^{-\frac{\pi b^2 \rho i}{2}}.$$

Puisque

$$\Theta(z)_{a+2,b} = \Theta(z)_{a,b},$$

il est clair que

$$A_{a+2,\,b} = A_{a,\,b}.$$

Si dans la formule précédente on remplace b par $b+2$, on a

$$\Theta(z)_{a,b+2} = A_{a,\,b+2}(-1)^{-\frac{a^2 b}{2}} \sum (-1)^{a(m+1)} e^{2\pi i\left\{[2(m+1)+b]\frac{z}{\omega}+[2(m+1)+b]^2\frac{\rho}{4}\right\}},$$

en observant que $(-1)^{-a^2} = (-1)^{a^2} = (-1)^a$, ou

$$\Theta(z)_{a,\,b+2} = A_{a,\,b+2}(-1)^{-\frac{a^2 b}{2}} \sum (-1)^{am} e^{2\pi i\left[(2m+b)\frac{z}{\omega}+(2m+b)^2\frac{\rho}{4}\right]}.$$

Mais on sait que

$$\Theta(z)_{a,b+2} = \Theta(z)_{a,\,b}.$$

On en déduit

$$A_{a,\,b+2} = A_{a,\,b}.$$

Ainsi toutes les constantes se réduisent aux quatre suivantes

$$A_{0,0},\quad A_{1,0},\quad A_{0,1},\quad A_{1,1}.$$

146. On peut faire dépendre ces quatre constantes de deux d'entre elles. Dans la formule (1) faisons $b = 0$ ou $b = 1$, nous aurons

$$\Theta(z)_{a,0} = A_{a,0}\sum(-1)^{am} e^{2\pi i\left[2m\frac{z}{\omega}+m^2\rho\right]},$$

$$\Theta(z)_{a,1} = (-1)^{-\frac{a^2}{2}} A_{a,1}\sum(-1)^{am} e^{2\pi i\left[(2m+1)\frac{z}{\omega}+(2m+1)^2\frac{\rho}{4}\right]},$$

et, en remplaçant dans la première z par $z+\frac{\omega'}{2}$,

$$\Theta\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)_{a,0} = A_{a,0}\sum(-1)^{am} e^{2\pi i\left[2m\frac{z}{\omega}+(m^2+m)\rho\right]}$$

$$= e^{-\frac{\pi}{2}\rho i}\, e^{-\frac{2\pi z i}{\omega}} A_{a,0}\sum(-1)^{am} e^{2\pi i\left[(2m+1)\frac{z}{\omega}+(2m+1)^2\frac{\rho}{4}\right]}$$

$$= (-1)^{\frac{a^2}{2}}\, e^{-\frac{\pi}{2}\rho i}\, e^{-\frac{2\pi z i}{\omega}} \frac{A_{a,0}}{A_{a,1}}\,\Theta(z)_{a,1}.$$

On en déduit, en donnant successivement à a les valeurs 0 et 1,

$$\frac{\theta\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)}{\theta_2(z)}=\frac{A_{0,0}}{A_{0,1}}e^{-\frac{\pi\rho i}{2}}e^{-\frac{2\pi zi}{\omega}},$$

$$\frac{\theta_1\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)}{i\theta_3(z)}=\frac{A_{1,0}}{A_{1,1}}e^{-\frac{\pi\rho i}{2}}e^{-\frac{2\pi zi}{\omega}};$$

en comparant ces équations aux équations (11) du n° 135, on obtient les relations

$$\frac{A_{0,1}}{A_{0,0}}=\frac{A_{1,1}}{A_{1,0}}=\frac{1}{\sqrt{k}},$$

on a donc

$$A_{a,1}=\frac{A_{a,0}}{\sqrt{k}},$$

ou, plus généralement,

$$(2)\qquad A_{a,b}=A_{a,0}\,k^{\frac{(-1)^b-1}{4}}.$$

Ainsi toutes les constantes se ramènent à deux, $A_{0,0}$ et $A_{1,0}$.

147. De la formule (1) on déduit

$$\Theta(z)_{0,0}=A_{0,0}\sum e^{2\pi i\left(2m\frac{z}{\omega}+m^2\rho\right)},$$

$$\Theta(z)_{1,0}=A_{1,0}\sum(-1)^m e^{2\pi i\left(2m\frac{z}{\omega}+m^2\rho\right)}.$$

Si dans cette dernière formule on remplace z par $z+\frac{\omega}{4}$, il vient

$$\Theta\left(z+\frac{\omega}{4}\right)_{1,0}=A_{1,0}\sum e^{2\pi i\left(2m\frac{z}{\omega}+m^2\rho\right)}$$

$$=\frac{A_{1,0}}{A_{0,0}}\Theta(z)_{0,0}.$$

En vertu de l'une des relations (9) du n° 134, on a

$$A_{1,0} = \frac{A_{0,0}}{\sqrt{k'}},$$

et en général

(3) $$A_{a,0} = A_{0,0}\, k'^{\frac{(-1)^a - 1}{4}}.$$

La relation (2) devient ainsi

(4) $$A_{a,b} = A_{0,0}\, k'^{\frac{(-1)^a - 1}{4}}\, k^{\frac{(-1)^b - 1}{4}},$$

et l'on arrive à la formule générale

(I) $$\left\{\begin{aligned} &\Theta(z)_{a,b} = A(-1)^{-\frac{a^2 b}{2}}\, k'^{\frac{(-1)^a-1}{4}}\, k^{\frac{(-1)^b-1}{4}} \\ &\times \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} (-1)^{am} e^{2\pi i\left[(2m+b)\frac{z}{\omega} + (2m+b)^2 \frac{\rho}{4}\right]}, \end{aligned}\right.$$

qui représente dans tous les cas la fonction Θ.

148. En appliquant cette formule générale aux quatre fonctions Θ, on a

(II) $$\left\{\begin{aligned} \theta(z) &= A \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} e^{2\pi i\left(\frac{2mz}{\omega} + m^2\rho\right)}, \\ \theta_1(z) &= \frac{A}{\sqrt{k'}} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} (-1)^m e^{2\pi i\left(\frac{2mz}{\omega} + m^2\rho\right)}, \\ \theta_2(z) &= \frac{A}{\sqrt{k}} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} e^{2\pi i\left[\frac{(2m+1)z}{\omega} + (2m+1)^2\frac{\rho}{4}\right]}, \\ \theta_3(z) &= \frac{-iA}{\sqrt{kk'}} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} (-1)^m e^{2\pi i\left[\frac{(2m+1)z}{\omega} + (2m+1)^2\frac{\rho}{4}\right]}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on groupe les termes deux à deux, ces formule[s]
viennent

$$
\text{(III)}\left\{
\begin{aligned}
\theta(z) &= A\left[1+2\sum_{m=1}^{m=\infty} e^{2m^2\pi\rho i}\cos\frac{4m\pi z}{\omega}\right],\\
\theta_1(z) &= \frac{A}{\sqrt{k'}}\left[1+2\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^m e^{2m^2\pi\rho i}\cos\frac{4m\pi z}{\omega}\right],\\
\theta_2(z) &= \frac{2A}{\sqrt{k}}\sum_{m=0}^{m=\infty} e^{\frac{(2m+1)^2\pi\rho i}{2}}\cos\frac{2(2m+1)\pi z}{\omega},\\
\theta_3(z) &= \frac{2A}{\sqrt{kk'}}\sum_{m=0}^{m=\infty}(-1)^m e^{\frac{(2m+1)^2\pi\rho i}{2}}\sin\frac{2(2m+1)\pi}{\omega}
\end{aligned}\right.
$$

En représentant par q la quantité $e^{2\pi\rho i}$, on mettra ce[s]
mules sous la forme

$$
\text{(IV)}\left\{
\begin{aligned}
\theta(z) &= A\left[1+2\sum_{m=1}^{m=\infty} q^{m^2}\cos\frac{4m\pi z}{\omega}\right],\\
\theta_1(z) &= \frac{A}{\sqrt{k'}}\left[1+2\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^m q^{m^2}\cos\frac{4m\pi z}{\omega}\right],\\
\theta_2(z) &= \frac{2A\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}\sum_{m=0}^{m=\infty} q^{m(m+1)}\cos\frac{2(2m+1)\pi z}{\omega},\\
\theta_3(z) &= \frac{2A\sqrt[4]{q}}{\sqrt{kk'}}\sum_{m=0}^{m=\infty}(-1)^m q^{m(m+1)}\sin\frac{2(2m+1)\pi z}{\omega}.
\end{aligned}\right.
$$

Ces dernières formules sont celles données par Jac[obi, à]
des facteurs constants près.

149. Il reste à déterminer la constante A. Voici l'a[rtifice]
imaginé par Jacobi.

Si l'on pose $x = \frac{2\pi z}{\omega}$, et si l'on représente par $\varphi(q)$ chacune des deux fonctions de q,

$$\frac{A}{\sqrt{k'}} \prod_{n=0}^{n=\infty} (1-q^{2n+1})^2 = \frac{4A\pi\sqrt[4]{q}}{\omega\sqrt{kk'}} \prod_{n=1}^{n=\infty} (1-q^{2n})^2$$

égales entre elles, en vertu des relations (14) et (16), du n° 136, on a, en comparant la seconde et la quatrième des formules (II) du n° 131 et (IV) du numéro précédent,

$$\prod_{n=0}^{n=\infty} [1 - 2q^{2n+1} \cos 2x + q^{2(2n+1)}]$$

$$= \varphi(q)\left[1 + 2\sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^m q^{m^2} \cos 2mx\right],$$

$$\sin x \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 - 2q^{2n} \cos 2x + q^{4n})$$

$$= \varphi(q) \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m q^{m(m+1)} \sin(2m+1)x.$$

Les deux membres de chacune de ces égalités sont identiques, quelles que soient x et q. Remplaçons q par q^2, et multiplions membre à membre, en remarquant que le produit des deux premiers membres donne le premier membre de la seconde égalité, nous aurons identiquement

$$\varphi(q^2)^2 \left[1 + 2\sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^m q^{2m^2} \cos 2mx\right]$$

$$\times \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m q^{2m(m+1)} \sin(2m+1)x$$

$$= \varphi(q) \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m q^{m(m+1)} \sin(2m+1)x.$$

En égalant les coefficients des termes en $\sin x$, il vient

$$\varphi(q)=\varphi(q^2)^2 \cdot \sum_{m=0}^{m=\infty} q^{m(m+1)}.$$

Mais si dans la seconde des égalités primitives on fait $x=\frac{\pi}{2}$, on a

$$\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+q^{2n})^2=\varphi(q)\sum_{m=0}^{m=\infty} q^{m(m+1)};$$

on en déduit la relation

$$\frac{\varphi(q)}{\varphi(q^2)}=\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+q^{2n})=\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{1-q^{4n}}{1-q^{2n}},$$

ou

$$\varphi(q)\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n})=\varphi(q^2)\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{4n}).$$

En remplaçant de nouveau q par q^2 et ainsi de suite indéfiniment, le module de q étant moindre que l'unité, on arrivera à l'unité comme valeur constante de cette fonction; on a donc

$$\varphi(q)\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n})=1;$$

d'où

$$\varphi(q)=\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{1-q^{2n}},$$

et, par suite,

$$(7) \qquad \frac{\sqrt{k'}}{A}=\prod_{n=0}^{n=\infty}(1-q^{2n+1})^2[1-q^{2(n+1)}].$$

En comparant cette formule à celles du n° 136, on obtient la relation

$$(8) \qquad \frac{1}{A}=\sqrt{\frac{\omega}{2\pi}}.$$

150. On a ainsi pour représenter les fonctions Θ la formule générale

$$(V)\quad \left\{\begin{aligned} \Theta(z)_{a,b} &= \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}}\, e^{-\frac{a^2 b}{2}\pi i}\, k'^{\frac{(-1)^a-1}{2}}\, k^{\frac{(-1)^b-1}{2}} \\ &\times \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (-1)^{am}\, e^{2\pi i\left[(2m+b)\frac{z}{\omega}+(2m+b)^2\frac{\rho}{4}\right]}, \end{aligned}\right.$$

et ces quatre fonctions sont exprimées par les formules particulières

$$(VI)\quad \left\{\begin{aligned} \theta(z) &= \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}}\left(1+2\sum_{m=1}^{m=\infty} q^{m^2}\cos\frac{4m\pi z}{\omega}\right), \\ \theta_1(z) &= \sqrt{\frac{2\pi}{k'\omega}}\left[1+2\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^m q^{m^2}\cos\frac{4m\pi z}{\omega}\right], \\ \theta_2(z) &= 2\sqrt{\frac{2\pi}{k\omega}}\sqrt[4]{q}\sum_{m=0}^{m=\infty} q^{m(m+1)}\cos\frac{2(2m+1)\pi z}{\omega}, \\ \theta_3(z) &= 2\sqrt{\frac{2\pi}{kk'\omega}}\sqrt[4]{q}\sum_{m=0}^{m=\infty}(-1)^m q^{m(m+1)}\sin\frac{2(2m+1)\pi z}{\omega}. \end{aligned}\right.$$

151. En faisant $z=0$ dans les trois premières formules, on obtient les relations

$$(9)\qquad \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} = 1+2\sum_{m=1}^{m=\infty} q^{m^2},$$

$$(10)\qquad \sqrt{\frac{k'\omega}{2\pi}} = 1+2\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^m q^{m^2},$$

$$(11)\qquad \sqrt{\frac{k\omega}{2\pi}} = 2\sqrt[4]{q}\sum_{m=0}^{m=\infty} q^{m(m+1)},$$

qui déterminent la première période ω et les modules k et k'.

En prenant la dérivée de la quatrième, et faisant $z=0$, on a aussi

$$(12)\qquad \sqrt{kk'\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^3} = 2\sqrt[4]{q}\sum_{m=0}^{m=\infty}(-1)^m(2m+1)\,q^{m(m+1)}.$$

152. La comparaison de ces formules avec celles du nº **136** conduit à des relations remarquables entre des produits d'un nombre infini de facteurs et des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de la variable. En égalant les valeurs de $\sqrt{\frac{k'\omega}{2\pi}}$, de $\sqrt{\frac{k\omega}{2\pi}}$ et de $\sqrt{kk'\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^3}$, et remplaçant dans celles-ci q^2 par q, on a les relations

$$(13)\qquad \prod_{m=1}^{m=\infty}\frac{1-q^m}{1+q^m} = 1+2\sum_{m=1}^{m=\infty}q^{m^2},$$

$$(14)\qquad \prod_{m=0}^{m=\infty}\frac{1-q^{2m+2}}{1-q^{2m+1}} = \sum_{m=0}^{m=\infty}q^{\frac{m(m+1)}{2}},$$

$$(15)\qquad \prod_{m=0}^{m=\infty}(1-q^{2m+1})^3 = \sum_{m=0}^{m=\infty}(-1)^m(2m+1)\,q^{\frac{m(m+1)}{2}}.$$

Développement de la fonction λ.

153. Proposons-nous maintenant de développer la fonction elliptique $\lambda(z)$. Nous posons toujours $t=e^{\frac{2\pi zi}{\omega}}$. Aux valeurs

$$z = m\frac{\omega}{2}+(2n+1)\frac{\omega'}{2},$$

qui rendent la fonction infinie, correspondent les valeurs

$$t = \pm e^{(2n+1)\pi\rho i} = \pm q^{\frac{2n+1}{2}},$$

dont les modules varient en progression géométrique et les arguments en progression arithmétique. Ces deux séries de

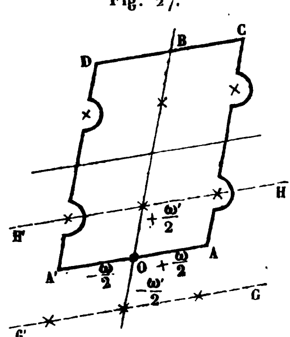
valeurs de t forment en quelque sorte deux spirales qui, d'une part s'éloignent à l'infini, et d'autre part se rapprochent indéfiniment de l'origine. De l'origine comme centre, avec des rayons égaux aux modules de $q^{\frac{2n-1}{2}}$ et de $q^{\frac{2n+1}{2}}$, n désignant un nombre entier quelconque, décrivons deux cercles, la fonction λ sera développable en une double série convergente suivant les puissances entières, positives ou négatives de la variable t entre ces deux cercles. Il est aisé de voir que quand le point t tourne indéfiniment sur une circonférence ayant pour centre l'origine, le point z décrit nne droite infinie parallèle à la direction ω. Il en résulte que, si l'on remplace t par $e^{\frac{2\pi z i}{\omega}}$, on aura une série ordonnée suivant les puissances de l'exponentielle et que cette série sera convergente pour toutes les valeurs de z situées dans la bande déterminée par les parallèles à la direction ω, menées par les points

$$z = (2n-1)\frac{\omega'}{2}, \quad z = (2n+1)\frac{\omega'}{2}.$$

Il faudra une série particulière pour chaque bande.

Supposons d'abord $n = 0$, le développement relatif à t s'effectuera entre deux cercles ayant pour rayons les modules de $\frac{1}{\sqrt{q}}$ et de $\sqrt{q}$, et relativement à z entre les parallèles G'G, H'H (*fig.* 27) menées à la direction ω par les points $z = -\frac{\omega'}{2}$, $z = \frac{\omega'}{2}$. La fonction $\lambda(z)$ étant impaire et changeant de signe quand on augmente z de $\frac{\omega}{2}$, on a

Fig. 27.



$$\lambda(z) = \sum_{m=0}^{m=\infty} A_m \left[e^{(2m+1)\frac{2\pi z i}{\omega}} - e^{-(2m+1)\frac{2\pi z i}{\omega}} \right].$$

En prenant la dérivée de la quatrième. ...iner les coefficients aussi ...é tous les termes par

$$(12)\qquad \sqrt{kk'\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^3} = 2\sqrt[4]{r}$$

... à $+\frac{\omega}{2}$ suivant le chemin rec-

152. La compar... conduit à des re... nombre infini ... puissances de $\sqrt{\frac{k'}{...}}$ cell...

$$\int_{-\frac{\omega}{2}}^{+\frac{\omega}{2}} \lambda(z)\, e^{(2m+1)\frac{2\pi z i}{\omega}}\, dz.$$

...la direction ω' la longueur OB égale à $n'\omega'$ et ... prenons dans ... considérons l'intégrale

$$-\frac{1}{\omega}\int \lambda(z)\, e^{(2m+1)\frac{2\pi z i}{\omega}}\, dz,$$

prise le long du contour fermé A′ACDA′, tracé, comme l'indique la figure, de manière à éviter les infinis. La fonction reprenant la même valeur aux points correspondants des deux lignes AC et A′D, les parties de l'intégrale relatives à ces deux lignes se détruisent. D'un autre côté, si l'on augmente n' indéfiniment, la partie relative à CD devient nulle; car, si l'on pose $z = n'\omega' + z'$, on voit que l'intégrale

$$-\frac{1}{\omega}\, q^{n'(2m+1)} \int_{\frac{\omega}{2}}^{-\frac{\omega}{2}} \lambda(z')\, e^{(2m+1)\frac{2\pi z' i}{\omega}}\, dz',$$

relative à cette ligne diminue indéfiniment. L'intégrale prise le long du contour fermé se réduit donc à la partie A′A.

On sait que le résidu relatif à l'aire plane A′ACD est égal à la somme des résidus relatifs à tous les infinis compris dans cette aire plane. Ces infinis sont disposés en deux files rectilignes OB et AC. Pour passer de la première file à la seconde, il suffit d'augmenter z de $\frac{\omega}{2}$; $\lambda(z)$ et l'exponentielle $e^{(2m+1)\frac{2\pi z i}{\omega}}$ changeant de signes à la fois, leur produit reprend la même valeur, et, par conséquent, la seconde file

donne les mêmes résidus que la première. Un infini quelconque de la première file est de la forme $(2n+1)\frac{\omega'}{2}$; si l'on pose

$$z = (2n+1)\frac{\omega'}{2} + z',$$

il vient

$$\lambda(z) = \frac{1}{k\lambda(z')},$$

et l'on a à calculer l'intégrale

$$-\frac{1}{k\omega} q^{(2m+1)\frac{2n+1}{2}} \int \frac{e^{(2m+1)\frac{2\pi z' i}{\omega}}}{\lambda(z')} dz',$$

le long d'un petit cercle décrit autour du point $(2n+1)\frac{\omega'}{2}$, ce qui donne

$$-\frac{2\pi i}{k\omega} q^{(2m+1)\frac{2n+1}{2}}.$$

On a ainsi

$$A_m = -\frac{4\pi i}{k\omega}\sum_{n=0}^{n=\infty} q^{(2m+1)\frac{2n+1}{2}} = -\frac{4\pi i}{k\omega}\frac{q^{\frac{2m+1}{2}}}{1-q^{2m+1}},$$

et, par suite,

$$\text{(VII)} \qquad \lambda(z) = \frac{8\pi\sqrt{q}}{k\omega}\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{q^m}{1-q^{2m+1}}\sin(2m+1)\frac{2\pi z}{\omega}.$$

153. De cette série établie pour la bande comprise entre les deux parallèles menées à la direction ω par les points

$$z = -\frac{\omega'}{2} \quad \text{et} \quad z = \frac{\omega'}{2},$$

on déduit aisément celle qui convient à la bande comprise entre les parallèles menées par les points

$$z = \frac{(2n-1)\omega'}{2} \quad \text{et} \quad z = \frac{(2n+1)\omega'}{2}.$$

Car si l'on pose

$$z = n\omega' + z',$$

la nouvelle variable z' restant comprise dans la première bande, on pourra appliquer la formule précédente, ce qui donne, en remplaçant z' par $z - n\omega'$,

$$\text{(VII)} \quad \lambda(z) = \frac{8\pi\sqrt{q}}{k\omega} \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{q^m}{1-q^{2m+1}} \sin(2m+1)\left(\frac{2\pi z}{\omega} - 2n\pi\rho\right).$$

Développement de la fonction μ.

156. Les mêmes considérations s'appliquent à la fonction μ. Cette fonction ayant les mêmes infinis que la fonction λ, le développement s'effectuera dans les mêmes bandes. Cette fonction étant paire, et changeant de signe quand on augmente z de $\frac{\omega}{2}$, le développement sera de la forme

$$\mu(z) = \sum_{m=0}^{m=\infty} B_m \left[e^{(2m+1)\frac{2\pi z i}{\omega}} + e^{-(2m+1)\frac{2\pi z i}{\omega}} \right].$$

En nous bornant à la première bande, nous déterminerons comme précédemment les valeurs des coefficients, et nous aurons

$$\text{(IX)} \quad \mu(z) = \frac{8\pi\sqrt{q}}{k\omega} \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{q^m}{1+q^{2m+1}} \cos(2m+1)\frac{2\pi z}{\omega}.$$

Développement de la fonction ν.

157. Cette fonction étant paire et admettant pour première période $\frac{\omega}{2}$, le développement aura la forme

$$\nu(z) = C_0 + \sum_{m=1}^{m=\infty} C_m \left(e^{\frac{4m\pi z i}{\omega}} + e^{-\frac{4m\pi z i}{\omega}} \right).$$

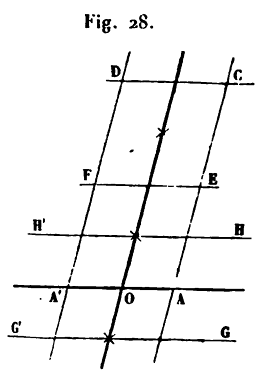
Nous nous bornerons encore à la première bande, comprise entre les parallèles $G'G$, $H'H$ (*fig.* 28). En intégrant de $-\frac{\omega}{4}$

à $\frac{\omega}{4}$, suivant le chemin rectiligne A′A, on a

$$C_0 = \frac{2}{\omega}\int_{-\frac{\omega}{4}}^{\frac{\omega}{4}} \nu(z)\, dz.$$

Prenons la longueur AE égale à ω', et considérons l'intégrale $\frac{2}{\omega}\int \nu(z)\, dz$, prise le long du contour fermé A′AEF; les portions relatives aux côtés AE, FA′ se détruisent; la fonction $\nu(z)$ changeant de signe quand on augmente z de ω', la partie relative à EF est égale à celle relative à A′A; ainsi la quantité $2C_0$ est égale à l'intégrale prise le long du contour du parallélogramme, contour que l'on peut réduire à un cercle infiniment petit décrit autour du point $z = \frac{\omega'}{2}$. Si l'on pose

Fig. 28.



$$z = \frac{\omega'}{2} + z',$$

on a (n° 100)

$$\nu(z) = -i\frac{\mu(z')}{\lambda(z')},$$

et l'on obtient $\frac{4\pi}{\omega}$ pour valeur de l'intégrale, ce qui donne le premier coefficient

$$C_0 = \frac{2\pi}{\omega}.$$

On obtiendra les autres coefficients en intégrant suivant A′A, après avoir multiplié par $e^{\frac{4m\pi zi}{\omega}}$, ce qui donne

$$C_m = \frac{2}{\omega}\int_{-\frac{\omega}{4}}^{\frac{\omega}{4}} \nu(z)\, e^{\frac{4m\pi zi}{\omega}}\, dz.$$

Prenons la longueur AC égale à $n'\omega'$, et considérons l'intégrale prise le long du contour du parallélogramme A'ACD; la partie relative à CD devenant infiniment petite, quand n' augmente indéfiniment, il suffit d'évaluer les résidus relatifs à la file d'infinis situés dans ce parallélogramme. Si l'on pose

$$z = (2n+1)\frac{\omega'}{2} + z',$$

on a

$$\nu(z) = -i(-1)^n \frac{\mu(z')}{\lambda(z')},$$

ce qui conduit à la valeur

$$C_m = \frac{4\pi}{\omega} \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n q^{m(2n+1)} = \frac{4\pi}{\omega} \frac{q^m}{1+q^{2m}},$$

et l'on obtient ainsi la formule

$$\text{(X)} \qquad \nu(z) = \frac{2\pi}{\omega}\left(1 + 4\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{q^m}{1+q^{2m}} \cos\frac{4m\pi z}{\omega}\right).$$

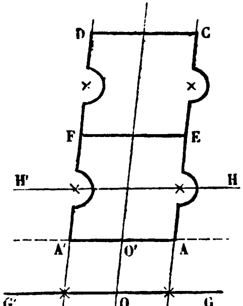
Développement de la fonction $\varpi(z)$.

158. Les infinis de la fonction $\varpi(z)$ sont les zéros de la fonction $\mu(z)$; ils sont représentés par la formule

$$z = (2m+1)\frac{\omega}{4} + n\omega';$$

à ces infinis correspondent les valeurs $t = \pm iq^n$; le développement sera convergent entre deux parallèles à la direction ω menées par les points $z = n\omega'$, $z = (n+1)\omega'$. Considérons en particulier la bande comprise entre les parallèles G'G, H'H, menées par les points $z = 0$, $z = \omega'$ (*fig.* 29).

Fig. 29.



Afin de transporter l'origine au milieu de cette bande,

posons

$$z = \frac{\omega'}{2} + z',$$

d'où (n° 102)

$$\varpi(z) = \frac{i}{\nu(z')}.$$

La question revient donc à développer la fonction $\frac{1}{\nu(z')}$ dans la bande comprise entre les parallèles menées par les points

$$z' = -\frac{\omega'}{2}, \quad z' = \frac{\omega'}{2}.$$

Cette fonction étant paire et admettant la période $\frac{\omega}{2}$, le développement est de la forme

$$\frac{1}{\nu(z')} = D_0 + \sum_{m=1}^{m=\infty} D_m \left(e^{\frac{4m\pi z' i}{\omega}} + e^{-\frac{4m\pi z' i}{\omega}}\right).$$

L'intégration le long du concours fermé A'AEF donne le premier coefficient D_0; l'intégration le long du contour A'ACD donne un coefficient quelconque D_m. On obtient ainsi la série

$$\frac{1}{\nu(z')} = \frac{2\pi}{k'\omega}\left[1 + 4\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^m \frac{q^m}{1+q^{2m}} \cos\frac{4m\pi z'}{\omega}\right].$$

On en déduit

$$\text{(XI)} \quad \varpi(z) = \frac{2\pi i}{k'\omega}\left[1 + 4\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^m \frac{q^m}{1+q^{2m}} \cos\left(\frac{4m\pi z}{\omega} - 2m\pi\rho\right)\right].$$

CHAPITRE V

DES QUADRATURES ELLIPTIQUES.

159. Considérons une intégrale définie

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz,$$

dans laquelle $f(z)$ désigne une fonction monodrome doublement périodique de l'ordre n. Si l'on remplace cette fonction par son expression au moyen de la fonction du second ordre $\lambda(gz, k)$, qui admet les mêmes périodes (n° 78), il viendra

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = \int_{z_0}^{z} \frac{M + N\lambda'(gz)}{L}\,dz$$
$$= \int_{z_0}^{z} \frac{M}{L}\,dz + \int_{z_0}^{z} \frac{N\lambda'(gz)}{L}\,dz,$$

L, M, N étant des polynômes entiers en $\lambda(gz)$. La seconde intégrale, pouvant être mise sous la forme

$$\frac{1}{g}\int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{N\,d\lambda}{L},$$

s'exprimera aisément au moyen de la fonction λ. Quant à la première, on peut la ramener au cas où la fraction rationnelle $\frac{M}{L}$ ne contient que des puissances paires de λ. On a, en effet,

$$\frac{M}{L} = \frac{M' + M''\lambda}{L' + L''\lambda} = \frac{(M' + M''\lambda)(L' - L''\lambda)}{L'^2 - L''^2\lambda^2} = \frac{P + Q\lambda}{R},$$

L', L'', M', M'', P, Q, R étant des polynômes pairs ; d'où

$$\int_{z_0}^{z} \frac{M\,dz}{L} = \int_{z_0}^{z} \frac{P\,dz}{R} + \int_{z_0}^{z} \frac{Q\lambda\,dz}{R}.$$

On obtiendra cette dernière intégrale en la mettant sous la forme

$$-\int_{\mu_0}^{\mu} \frac{Q\,d\mu}{gR\nu} = -\int_{\mu_0}^{\mu} \frac{Q\,d\mu}{gR\sqrt{k'^2 + k^2\mu^2}}.$$

Il reste à étudier l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z} \frac{P\,dz}{R},$$

dans laquelle P et R désignent des polynômes pairs en λ.

160. Avant d'aller plus loin, nous traiterons quelques exemples particuliers. Soit l'intégrale définie

$$f(z) = \int_0^z \lambda(z)\,dz,$$

dans laquelle nous supposons le paramètre g égal à l'unité. La fonction $f(z)$ n'est pas monodrome; lorsque z tourne autour de l'un des points qui rendent la fonction λ infinie, elle s'accroît de $\pm \frac{2\pi i}{k}$; mais la fonction $F(z) = e^{kf(z)}$ est monodrome. Des deux intégrales rectilignes

$$\int_0^{\omega} \lambda(z)\,dz, \qquad \int_0^{\omega'} \lambda(z)\,dz,$$

la première, ayant ses éléments égaux deux à deux et de signes contraires, est nulle; la seconde (il est bien entendu que l'on évite l'infini par une petite courbe) est égale à $\pm \frac{\pi i}{k}$: si l'on va de l'origine au point z par le chemin rectiligne, ou au point $m\omega + 2n\omega' + z$ par la ligne brisée $m\omega + 2n\omega' + z$, on obtiendra la même valeur de F (z); cette fonction admet donc les deux périodes ω et $2\omega'$.

On obtient aisément l'expression de la fonction $f(z)$ à l'aide des fonctions elliptiques. On a, en effet,

$$f(z) = -\int_1^{\mu} \frac{d\mu}{\nu}$$

$$= -\int_1^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{k'^2 + k^2\mu^2}} = \frac{1}{k} \log \frac{\sqrt{k'^2 + k^2\mu^2} - k\mu}{1 - k};$$

d'où

$$(1) \qquad \int_0^z \lambda(z)\,dz = \frac{1}{k} \log \frac{\nu(z) - k\mu(z)}{1 - k}.$$

L'intégrale définie

$$\int_{\frac{\omega'}{2}}^{z} \frac{dz}{\lambda(z)}$$

se ramène à la précédente. Si l'on pose

$$z = \frac{\omega'}{2} + z',$$

on a

$$(2)\quad \int_{\frac{\omega'}{2}}^{z} \frac{dz}{\lambda(z)} = k\int_{0}^{z'} \lambda(z')\,dz' = \log\frac{\nu(z') - k\mu(z')}{1-k} = \log\frac{i[\nu(z) - \mu(\cdots}{(1-k)\lambda(z\cdots}$$

On obtient aussi très-aisément les intégrales suivantes :

$$(3)\qquad \int_0^z \mu(z)\,dz = \frac{1}{k}\arcsin k\lambda(z),$$

$$(4)\qquad \int_0^z \nu(z)\,dz = \arcsin \lambda(z),$$

$$(5)\qquad \int_0^z \lambda\left(\frac{\omega}{4} - z\right) dz = \frac{1}{2k}\log\frac{1 + k\lambda(z)}{1 - k\lambda(z)},$$

$$(6)\qquad \int_0^z \frac{dz}{\lambda\left(\frac{\omega}{4} - z\right)} = \frac{1}{2}\log\frac{1+\lambda(z)}{1-\lambda(z)}.$$

161. Considérons maintenant l'intégrale définie

$$f(z) = \int_0^z \lambda^2(z)\,dz.$$

Quand la variable tourne autour de l'un des points qui rendent λ infinie, λ^2 ne renfermant pas d'infiniment grand du premier ordre, l'intégrale définie est nulle et la fonction $f(z)$ reprend la même valeur ; c'est donc une fonction monodrome impaire qui admet comme infinis simples ceux de λ. Mais elle n'est pas périodique, parce que les intégrales rectilignes de o à ω ou de o à ω' ne sont pas nulles.

Nous avons trouvé au n° 141 la relation

$$\frac{d^2 \log\theta_1(z)}{dz^2} = -k^2\lambda^2(z) + \theta_1''(0).$$

On en déduit

$$(7) \qquad \int_0^z \lambda^2(z)\,dz = \frac{1}{k^2}\left[-\frac{d\log\theta_1(z)}{dz} + z\,\theta_1''(0)\right].$$

On a de même, en vertu des relations analogues,

$$(8) \qquad \int_{\frac{\omega}{4}}^{z} \frac{dz}{\lambda^2(z)} = \left(z - \frac{\omega}{4}\right)\theta_1''(0) - \left[\frac{d\log\theta_3(z)}{dz}\right]_{\frac{\omega}{4}}^{z},$$

$$(9) \qquad \int_0^z \frac{dz}{\mu^2(z)} = \frac{z\,\theta''(0)}{k'^2} - \frac{1}{k'^2}\frac{d\log\theta_2(z)}{dz},$$

$$(10) \qquad \int_0^z \frac{dz}{\nu^2(z)} = -\frac{z\,\theta_2''(0)}{k'^2} + \frac{1}{k'^2}\frac{d\log\theta(z)}{dz}.$$

162. Occupons-nous actuellement de l'intégrale définie

$$\int_0^z \frac{dz}{1 - a\lambda^2(z)}.$$

Nous avons trouvé au n° **143** la relation

$$\frac{\theta_3(\alpha+z)\,\theta_3(\alpha-z)}{\theta_3^2(\alpha)\,\theta_1^2(z)} = 1 - \frac{\lambda^2(z)}{\lambda^2(\alpha)}.$$

En prenant les logarithmes et différentiant, on en déduit

$$\frac{\theta_3'(\alpha+z)}{\theta_3(\alpha+z)} - \frac{\theta_3'(\alpha-z)}{\theta_3(\alpha-z)} - 2\frac{\theta_1'(z)}{\theta_1(z)} = \frac{2\lambda(z)\lambda'(z)}{\lambda^2(z)-\lambda^2(\alpha)};$$

si l'on permute les lettres z et α, il vient

$$\frac{\theta_3'(z+\alpha)}{\theta_3(z+\alpha)} - \frac{\theta_3'(z-\alpha)}{\theta_3(z-\alpha)} - 2\frac{\theta_1'(\alpha)}{\theta_1(\alpha)} = \frac{2\lambda(\alpha)\lambda'(\alpha)}{\lambda^2(\alpha)-\lambda^2(z)}.$$

De cette dernière relation on déduit par l'intégration

$$(11) \qquad \int_0^z \frac{dz}{1 - \dfrac{\lambda^2(z)}{\lambda^2(\alpha)}} = -z\,\frac{\theta_3(\alpha)\,\theta_1'(\alpha)}{\theta(\alpha)\,\theta_2(\alpha)} + \frac{1}{2}\frac{\lambda(\alpha)}{\lambda'(\alpha)}\log\frac{\theta_3(\alpha+z)}{\theta_3(\alpha-z)}.$$

Si l'on fait $\lambda^2(\alpha) = \frac{1}{a}$, on aura l'intégrale cherchée.

Nous avons trouvé aussi au n° **143** la relation

$$\frac{\theta_1(\alpha+z)\,\theta_1(\alpha-z)}{\theta_1^2(\alpha)\,\theta_1^2(z)} = 1 - k^2\lambda^2(\alpha)\lambda^2(z).$$

On en déduit, en différentiant par rapport à α,

$$\frac{\theta'_1(z+\alpha)}{\theta_1(z+\alpha)} - \frac{\theta'_1(z-\alpha)}{\theta_1(z-\alpha)} - 2\frac{\theta'_1(\alpha)}{\theta_1(\alpha)} = -\frac{2k^2\lambda(\alpha)\lambda'(\alpha)\lambda^2(z)}{1-k^2\lambda^2(\alpha)\lambda^2(z)};$$

d'où

$$(12) \quad \int_0^z \frac{k^2\lambda(\alpha)\lambda'(\alpha)\lambda^2(z)}{1-k^2\lambda^2(\alpha)\lambda^2(z)}dz = z\frac{\theta'_1(\alpha)}{\theta_1(\alpha)} + \frac{1}{2}\log\frac{\theta_1(z-\alpha)}{\theta_1(z+\alpha)},$$

$$(13) \quad \int_0^z \frac{dz}{1-k^2\lambda^2(\alpha)\lambda^2(z)} = z\left[1+\frac{\theta_3(\alpha)\,\theta'_1(\alpha)}{\theta(\alpha)\,\theta_2(\alpha)}\right] + \frac{1}{2}\frac{\lambda(\alpha)}{\lambda'(\alpha)}\log\frac{\theta_1(z-\alpha)}{\theta_1(z+\alpha)}.$$

Si l'on fait $\lambda^2(\alpha) = \frac{a}{k^2}$, on aura encore l'intégrale cherchée.

Si le module k est réel et moindre que l'unité, et le paramètre a aussi réel, on emploiera de préférence la formule (11) lorsque le paramètre a aura une valeur positive plus grande que l'unité, et la formule (13) lorsque la valeur de a sera positive et moindre que k^2; de cette manière la constante α sera réelle. Mais il est deux cas où l'on ne peut éviter les imaginaires, ce sont ceux où le paramètre a a une valeur positive comprise entre k^2 et l'unité, ou bien une valeur négative. Ces deux cas se ramènent d'ailleurs l'un à l'autre. En effet, si l'on remplace z par $\frac{\omega}{4} - z'$ on a

$$\int \frac{dz}{1-a\lambda^2(z)} = -\int \frac{1-k^2\lambda^2(z')}{1-a+(a-k^2)\lambda^2(z')}dz'$$
$$= \frac{k^2}{a-k^2}z' - \frac{a\,k'^2}{(1-a)(a-k^2)}\int\frac{dz'}{1-\frac{k^2-a}{1-a}\lambda^2(z')}.$$

Posons $a' = \frac{k^2-a}{1-a}$; l'équation précédente ramène l'une à l'autre les transcendantes qui correspondent aux deux paramètres a et a'. Si a' est négatif, a est positif et compris entre k^2 et 1.

163. Les intégrales que nous avons étudiées dans les deux numéros précédents suffisent pour déterminer l'intégrale

$$\int F(\lambda^2)dz.$$

La fonction rationnelle $F(\lambda^2)$ se décompose en parties de la forme $A\lambda^{2m}$, m étant positif ou négatif, et en termes de la forme $\frac{A}{(\lambda^2+a)^m}$, m étant positif. Occupons-nous d'abord des termes de la première sorte.

On a

$$\frac{d\lambda^m}{dz} = m\lambda^{m-1}\frac{d\lambda}{dz},$$

$$\frac{d^2\lambda^m}{dz^2} = m\lambda^{m-1}\frac{d^2\lambda}{dz^2} + m(m-1)\lambda^{m-2}\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2,$$

et, en remplaçant $\frac{d\lambda}{dz}$, $\frac{d^2\lambda}{dz^2}$ par leurs valeurs,

$$\frac{d^2\lambda^m}{dz^2} = m(m-1)\lambda^{m-2} - m^2(1+k^2)\lambda^m + m(m+1)k^2\lambda^{m+2};$$

d'où

$$\frac{d\lambda^m}{dz} = m(m-1)\int\lambda^{m-2}dz - m^2(1+k^2)\int\lambda^m dz + m(m+1)k^2\int\lambda^{m+2}dz.$$

A l'aide de cette équation, quand on connaîtra $\int\lambda^{m-2}dz$ et $\int\lambda^m dz$, on pourra calculer $\int\lambda^{m+2}dz$, et, de même, quand on connaîtra $\int\lambda^{m+2}dz$ et $\int\lambda^m dz$, on pourra calculer $\int\lambda^{m-2}dz$. Toutes les puissances paires, positives ou négatives, se ramènent ainsi aux deux intégrales

$$\int\frac{dz}{\lambda^2(z)}, \quad \int\lambda^2(z)\,dz,$$

que nous avons exprimées à l'aide des fonctions Θ (n° **161**). Ces deux intégrales se réduisent d'ailleurs à une seule, en vertu de la relation (n° **141**)

$$\frac{d^2\log\lambda}{dz^2} = k^2\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2},$$

d'où

$$\frac{d\log\lambda}{dz} = k^2\int\lambda^2 dz - \int\frac{dz}{\lambda^2}.$$

164. Occupons-nous maintenant des termes de la seconde sorte. Désignons par y la fonction doublement périodique $\lambda^2(z)+a$, dont les périodes sont $\frac{\omega}{2}$ et ω' et qui admet l'infini double $\frac{\omega'}{2}$. Si, dans l'équation

$$\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2 = 1-(1+k^2)\lambda^2+k^2\lambda^4,$$

on remplace λ^2 par $y-a$, il vient

$$\begin{aligned}\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = &-4a[1+(1+k^2)a+k^2a^2]\\ &-4[1+2a(1+k^2)+3k^2a^2]y\\ &-4(1+k^2+3k^2a)y^2+4k^2y^3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\log y}{dz}\right)^2 = &\frac{4a[1+(1+k^2)a+k^2a^2]}{y^2}\\ &+\frac{4[1+2a(1+k^2)+3k^2a^2]}{y}\\ &-4(1+k^2+3k^2a)+4k^2y,\end{aligned}$$

(15)
$$\begin{aligned}\frac{d^2\log y}{dz^2} = &\frac{4a[1+(1+k^2)a+k^2a^2]}{y^2}\\ &-\frac{2[1+2a(1+k^2)+3k^2a^2]}{y}+2k^2y.\end{aligned}$$

Cette équation donnera $\int\frac{dz}{y^2}$, connaissant $\int\frac{dz}{y}$ (n° **162**).

De l'équation (15), on déduit

$$\frac{d^2y}{dz^2} = 2[1+2a(1+k^2)+3k^2a^2]-4(1+k^2+3k^2a)y+6k^2y^2;$$

si l'on remplace $\left(\frac{dy}{dz}\right)^2$ et $\frac{d^2y}{dz^2}$ par leurs valeurs dans l'équation

$$\frac{d^2y^m}{dz^m} = my^{m-1}\frac{d^2y}{dz^2}+m(m-1)y^{m-2}\left(\frac{dy}{dz}\right)^2,$$

il vient

(16)
$$\begin{aligned}\frac{d^2y^m}{dz^2} = &-4m(m-1)a[1+(1+k^2)a+k^2a^2]y^{m-2}\\ &+2m(2m-1)[1+2a(1+k^2)+3k^2a^2]y^{m-1}\\ &-4m^2[1+k^2+3k^2a]y^m+2m(2m+1)k^2y^{m+1}.\end{aligned}$$

En faisant successivement $m = -1$, $m = -2$, ..., on déduira de cette équation

$$\int \frac{dz}{y^3}, \quad \int \frac{dz}{y^4}, \ldots$$

Des trois transcendantes de Legendre.

165. On rencontre souvent dans les applications des intégrales de la forme

$$\int f(x, \mathrm{R})\, dx,$$

dans laquelle R désigne la racine carrée d'un polynôme en x du troisième ou du quatrième degré, et f une fonction rationnelle de x et de R. Cette fonction pouvant s'écrire

$$f(x, \mathrm{R}) = \frac{\mathrm{M} + \mathrm{NR}}{\mathrm{P} + \mathrm{QR}} = \frac{(\mathrm{M} + \mathrm{NR})(\mathrm{P} - \mathrm{QR})}{\mathrm{P}^2 - \mathrm{Q}^2\mathrm{R}^2}$$
$$= \mathrm{F}_1(x) + \frac{\mathrm{F}(x)}{\mathrm{R}},$$

M, N, P, Q étant des polynômes entiers en x, F et F_1 des fonctions rationnelles, on a

$$\int f(x, \mathrm{R})\, dx = \int \mathrm{F}_1(x)\, dx + \int \mathrm{F}(x) \frac{dx}{\mathrm{R}}.$$

La première intégrale s'obtenant aisément, il reste à étudier la seconde

$$\int \mathrm{F}(x) \frac{dx}{\mathrm{R}}.$$

Par une transformation facile, on ramène le polynôme R^2 à ne contenir que des puissances paires. Soit

$$\mathrm{R}^2 = \mathrm{A}(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta);$$

si l'on pose

$$x = \frac{a + by}{1 + y},$$

on aura

$$= \frac{(b - a)\, dy}{\sqrt{\mathrm{A}[a - \alpha + (b - \alpha)y][a - \beta + (b - \beta)y][a - \gamma + (b - \gamma)y][a - \delta + (b - \delta)y]}},$$

et l'on fera disparaître les puissances impaires, en assujettissant les deux constantes a et b à vérifier les deux relations

$$(a-\alpha)(b-\beta)+(a-\beta)(b-\alpha)=0,$$
$$(a-\gamma)(b-\delta)+(a-\delta)(b-\gamma)=0,$$

ou

$$2ab-(\alpha+\beta)(a+b)+2\alpha\beta=0,$$
$$2ab-(\gamma+\delta)(a+b)+2\gamma\delta=0;$$

d'où

$$a+b=\frac{2(\alpha\beta-\gamma\delta)}{\alpha+\beta-(\gamma+\delta)},$$
$$ab=\frac{\alpha\beta(\gamma+\delta)-\gamma\delta(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta-(\gamma+\delta)}.$$

Lorsque le polynôme R^2 a ses coefficients réels, ce qui a lieu ordinairement, ses racines sont réelles ou imaginaires conjuguées, et les deux constantes a et b peuvent être supposées réelles. En effet, ces deux constantes dépendent d'une équation du second degré, dans laquelle la condition de réalité des racines est

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-ab>0,$$

ou

$$(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)>0.$$

Si le polynôme R^2 a ses quatre racines réelles, comme on peut les supposer rangées par ordre de grandeur, la condition précédente est remplie; si les deux racines α et β sont imaginaires et les deux autres réelles, les facteurs $\alpha-\gamma$, $\beta-\gamma$ étant conjugués, ainsi que les deux autres $\alpha-\delta$, $\beta-\delta$, le produit est positif; enfin si les quatre racines α et β, γ et δ sont imaginaires et conjuguées deux à deux, les facteurs $\alpha-\gamma$, $\beta-\delta$ étant conjugués, ainsi que $\alpha-\delta$, $\beta-\gamma$, le produit est encore positif.

A la vérité la transformation précédente est en défaut quand

$$\alpha+\beta=\gamma+\delta;$$

mais, dans ce cas, on a

$$R^2 = A\,[x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta]\,[x^2 - (\alpha+\beta)x + \gamma\delta]$$
$$= A\left[\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\right]\left[\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\gamma-\delta}{2}\right)^2\right],$$

et, pour faire disparaître les termes de degré impair, il suffit de poser

$$x - \frac{\alpha+\beta}{2} = y.$$

Nous avons supposé le polynôme R^2 du quatrième degré; la même transformation réussit, s'il n'est que du troisième degré. Soit

$$R^2 = A(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma);$$

en posant, comme précédemment,

$$x = \frac{a+by}{1+y},$$

on aura

$$= \frac{(b-a)\,dy}{\sqrt{A(1+y)[a-\alpha+(b-\alpha)y][a-\beta+(b-\beta)y][a-\gamma+(b-\gamma)y]}},$$

et l'on assujettira les deux constantes a et b à vérifier les deux relations

$$a - \alpha + b - \alpha = 0,$$
$$(a-\beta)(b-\gamma) + (a-\gamma)(b-\beta) = 0;$$

d'où

$$a + b = 2\alpha,$$
$$ab = \alpha(\beta+\gamma) - \beta\gamma.$$

La condition $(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma) > 0$ étant remplie, on trouvera pour les constantes des valeurs réelles.

Lorsque le polynôme est du troisième degré, on opère plus rapidement la transformation en posant $x = \alpha + y^2$, α désignant une racine réelle.

Nous admettrons donc que, dans l'intégrale

$$\int F(x)\,\frac{dx}{R},$$

le polynôme R^2 ne renferme que des puissances paires. On

peut supposer aussi que la fonction rationnelle $F(x)$ ne renferme elle-même que des puissances paires; car si l'on met cette fonction sous la forme

$$F(x) = \frac{M + Nx}{P + Qx} = \frac{(M + Nx)(P - Qx)}{P^2 - Q^2x^2}$$
$$= F_1(x^2) + x F_2(x^2),$$

M, N, P, Q désignant des polynômes pairs, F_1 et F_2 des fonctions rationnelles, on a

$$\int F(x)\frac{dx}{R} = \int F_1(x^2)\frac{dx}{R} + \int \frac{F_2(x^2)\,x\,dx}{R}.$$

On obtient aisément la seconde intégrale en posant $x^2 = y$; il reste donc à étudier l'intégrale

$$\int F(x^2)\frac{dx}{R},$$

dans laquelle R désigne la racine carrée d'un polynôme pair à coefficients réels,

$$R = \sqrt{A(1 + mx^2)(1 + m'x^2)}.$$

166. Nous nous proposons maintenant de réduire ce radical à la forme $\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}$, qui convient aux fonctions elliptiques, et de manière que le module k soit réel et moindre que l'unité. Il faut pour cela transformer l'expression $\frac{dx}{R}$ en une autre de la forme

$$\frac{d\lambda}{g\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}}.$$

Il y a plusieurs cas à distinguer, suivant que les trois coefficients A, m, m' sont positifs ou négatifs.

1[er] *Cas.* $A = a^2$, $m = -h^2$, $m' = -h'^2$, $h > h'$. On posera

$$hx = \lambda,$$

d'où

$$\frac{dx}{R} = \frac{d\lambda}{ah\sqrt{(1-\lambda^2)\left(1-\frac{h'^2}{h^2}\lambda^2\right)}}.$$

2[e] *Cas.* $A = a^2$, $m = -h^2$, $m' = h'^2$. Le radical n'étant

réel qu'autant que x varie de o à $\frac{1}{h}$, on posera

$$hx = \sqrt{1-\lambda^2},$$

d'où

$$\frac{dx}{R} = \frac{-d\lambda}{a\sqrt{h^2+h'^2}\sqrt{(1-\lambda^2)\left(1-\frac{h'^2}{h^2+h'^2}\lambda^2\right)}}.$$

3ᵉ *Cas*. $A = a^2$, $m = h^2$, $m' = h'^2$, $h > h'$. x pouvant varier de o à ∞, on posera

$$hx = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}},$$

d'où

$$\frac{dx}{R} = \frac{d\lambda}{ah\sqrt{(1-\lambda^2)\left(1-\frac{h^2-h'^2}{h^2}\lambda^2\right)}}.$$

4ᵉ *Cas*. $A = -a^2$, $m = -h^2$, $m' = h'^2$. x variant de $\frac{1}{h}$ à ∞, on posera

$$hx = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}};$$

d'où

$$\frac{dx}{R} = \frac{d\lambda}{a\sqrt{h^2+h'^2}\sqrt{(1-\lambda^2)\left(1-\frac{h^2}{h^2+h'^2}\lambda^2\right)}}.$$

5ᵉ *Cas*. $A = -a^2$, $m = -h^2$, $m' = -h'^2$, $h > h'$. x variant de $\frac{1}{h}$ à $\frac{1}{h'}$, on posera

$$h'x = \sqrt{1-\frac{h^2-h'^2}{h^2}\lambda^2};$$

d'où

$$\frac{dx}{R} = \frac{-d\lambda}{ahh'\sqrt{(1-\lambda^2)\left(1-\frac{h^2-h'^2}{h^2}\lambda^2\right)}}.$$

Nous laissons de côté le cas où le radical serait toujours imaginaire. Dans toutes ces transformations, le module est réel, et

moindre que l'unité. L'intégrale

$$\int F(x^2)\frac{dx}{R}$$

est ainsi ramenée à la forme

$$\int f(\lambda^2)\,\frac{d\lambda}{\Delta\lambda},$$

$\Delta\lambda$ représentant, comme à l'ordinaire, le radical

$$\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}.$$

Cette intégrale est celle dont nous nous sommes occupés au commencement de ce chapitre; car si l'on pose

$$\frac{d\lambda}{\Delta\lambda}=dz,$$

λ désignera la fonction elliptique $\lambda(z,k)$, et l'on aura

$$\int f(\lambda^2)\,\frac{d\lambda}{\Delta\lambda}=\int f(\lambda^2)\,dz.$$

167. Il résulte de ce que nous avons dit aux nos 163 et 164, que toutes les intégrales de la forme

$$\int f(x^2)\,\frac{dx}{\Delta x}$$

dépendent des trois intégrales

$$\int_0^x \frac{dx}{\Delta x},\quad \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\Delta x},\quad \int_0^x \frac{dx}{(1-ax^2)\,\Delta x}.$$

C'est en cherchant à réduire l'intégrale

$$\int f(x,R)\,dx$$

à ses éléments les plus simples que Legendre a été conduit aux trois transcendantes dont nous venons de parler. Pour lui, x était la variable indépendante, et la valeur de l'intégrale la fonction. Il a abordé ainsi, par les fonctions inverses, la théorie des fonctions doublement périodiques. Aussi la double périodicité, qui est le caractère fondamental de ces fonctions, lui avait-elle échappé complétement.

La première transcendante est l'inverse de ce que nous appelons la fonction elliptique λ; si $x=\lambda(z)$, elle aura pour valeur la quantité z que l'on pourra augmenter de multiples des périodes ω, ω', suivant le chemin suivi dans l'intégration. Ayant adopté un signe pour désigner une fonction directe, il convient de le modifier de manière à représenter la fonction inverse. Nous ferons précéder le signe de la fonction directe de la lettre I, initiale du mot *inverse*. Ainsi nous écrirons

$$x=\lambda(z), \quad z=\mathrm{I}\lambda(x).$$

D'après cela, on a

$$\int_0^x \frac{dx}{\Delta x}=\mathrm{I}\lambda(x).$$

La seconde transcendante a été calculée au n° 161; on a trouvé

$$\int_0^x \frac{x^2\,dx}{\Delta x}=\int_0^z \lambda^2(z)\,dz=\frac{\theta_1''(0)}{k^2}z-\frac{1}{k^2}\frac{d\log\theta_1(z)}{dz}.$$

La troisième transcendante, mise sous la forme

$$\int_0^x \frac{dx}{(1-ax^2)\,\Delta x}=\int_0^z \frac{dz}{1-a\lambda^2(z)},$$

a été trouvée aussi au n° 162.

C'est à Jacobi que l'on doit l'expression si remarquable de la seconde et de la troisième transcendante à l'aide des fonctions Θ.

Legendre simplifiait un peu les trois intégrales précédentes en posant (108)

$$x=\sin\varphi.$$

On a alors

$$\int_0^x \frac{dx}{\Delta x}=\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

$$\int_0^x \frac{x^2\,dx}{\Delta x}=\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{1}{k^2}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}-\frac{1}{k^2}\int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

$$\int_0^x \frac{dx}{(1-ax^2)\,\Delta x}=\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1-a\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

et les trois intégrales se ramènent aux trois suivantes :

$$\text{(I)} \qquad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}},$$

$$\text{(II)} \qquad \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

$$\text{(III)} \qquad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 - a \sin^2\varphi)\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}.$$

Ce sont là, à proprement parler, les trois fonctions elliptiques de Legendre. Il représentait la première par le symbole $F(\varphi, k)$, la seconde par $E(\varphi, k)$, la troisième par $\Pi(\varphi, k, a)$.

On a donné à ces intégrales le nom de *fonctions elliptiques*, parce que la seconde donne la longueur d'un arc d'ellipse. Soit en effet l'ellipse ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

on peut poser

$$x = a \sin\varphi, \qquad y = b \cos\varphi,$$

et la longueur de l'arc d'ellipse, compté à partir du sommet du petit axe, a pour expression

$$s = a \int_0^\varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

e désignant l'excentricité de l'ellipse. L'angle φ a une signification géométrique très-simple ; si, sur le grand axe, comme diamètre, on décrit un cercle, que de l'extrémité de l'arc on abaisse une perpendiculaire sur le grand axe, et que l'on prolonge cette ordonnée jusqu'à la rencontre du cercle, le rayon qui va du centre à ce point du cercle fait avec le petit axe l'angle φ.

LIVRE V.

TRANSFORMATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

ADDITION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

168. Considérons la fonction monodrome doublement périodique

$$f(z) = \lambda(z+t) + \lambda(z-t),$$

dans laquelle nous regardons t comme une constante et z comme la variable. Cette fonction impaire, qui a les mêmes périodes que $\lambda(z)$, admet quatre infinis, savoir, les deux infinis $z = \frac{\omega'}{2} - t$ et $z = \frac{\omega + \omega'}{2} - t$ de $\lambda(z+t)$, et les deux infinis $z = \frac{\omega'}{2} + t$ et $z = \frac{\omega + \omega'}{2} + t$ de $\lambda(z-t)$. Elle admet aussi quatre zéros : en effet, pour que $f(z)$ soit nulle, il faut que

$$\lambda(z+t) = -\lambda(z-t) = \lambda(t-z),$$

ce qui exige que

$$z + t = t - z + m\omega + n\omega',$$

ou

$$z + t = \frac{\omega}{2} - (t-z) + m\omega + n\omega';$$

mais cette dernière condition $t = \frac{\omega}{4} + \frac{m\omega}{2} + \frac{n\omega'}{2}$ ne peut avoir lieu, puisque t est quelconque ; la première

$$z = m\frac{\omega}{2} + n\frac{\omega'}{2},$$

donne les quatre valeurs

$$z = 0, \quad z = \frac{\omega}{2}, \quad z = \frac{\omega'}{2}, \quad z = \frac{\omega + \omega'}{2};$$

de ces quatre zéros de la fonction $f(z)$, les deux premiers sont les zéros, les deux autres les infinis de $\lambda(z)$.

Il est facile de former, au moyen de la fonction $\lambda(z)$, une fonction doublement périodique qui admette les zéros et les infinis de la fonction $f(z)$. Considérons en effet la fraction

$$\frac{\lambda(z)}{\left[\lambda(z)-\lambda\left(\frac{\omega'}{2}+t\right)\right]\left[\lambda(z)-\lambda\left(\frac{\omega'}{2}-t\right)\right]}.$$

Le premier facteur du dénominateur s'annule pour

$$z=\frac{\omega'}{2}+t \quad \text{et} \quad z=\frac{\omega+\omega'}{2}-t;$$

le second pour

$$z=\frac{\omega'}{2}-t \quad \text{et} \quad z=\frac{\omega+\omega'}{2}+t;$$

ces quatre valeurs sont les infinis de $f(z)$, ainsi la fraction admet déjà les infinis de $f(z)$. Le numérateur s'annule pour

$$z=0 \quad \text{et} \quad z=\frac{\omega}{2};$$

ce sont les deux premiers zéros de $f(z)$; d'autre part le numérateur étant du premier degré et le dénominateur du second degré, les deux valeurs

$$z=\frac{\omega'}{2} \quad \text{et} \quad z=\frac{\omega+\omega'}{2},$$

qui rendent $\lambda(z)$ infinie, sont des zéros simples de la fraction; de sorte que la fraction admet aussi les zéros de $f(z)$. Ainsi la fraction considérée, que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{\lambda(z)}{\left[\lambda(z)-\frac{1}{k\lambda(t)}\right]\left[\lambda(z)+\frac{1}{k\lambda(t)}\right]},$$

ou

$$\frac{-k^2\lambda^2(t)\lambda(z)}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)},$$

a les mêmes zéros et les mêmes infinis que la fonction $f(z)$. Mais nous savons (n° 39) que lorsque deux fonctions ont les mêmes zéros et les mêmes infinis, ces deux fonctions sont égales

à un facteur constant près ; on a donc

$$\lambda(z+t)+\lambda(z-t)=\frac{A\lambda(z)}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}.$$

Pour déterminer la constante A, on prendra la dérivée, puis on fera $z=0$, ce qui donne $2\lambda'(t)=A$. Il en résulte

$$(1)\qquad \lambda(z+t)+\lambda(z-t)=\frac{2\lambda(z)\lambda'(t)}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}.$$

Si dans cette équation on permute les lettres z et t, il vient

$$(2)\qquad \lambda(z+t)-\lambda(z-t)=\frac{2\lambda(t)\lambda'(z)}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}.$$

En additionnant ces deux équations, on obtient la formule suivante

$$(\mathrm{I})\qquad \lambda(z+t)=\frac{\lambda(z)\lambda'(t)+\lambda(t)\lambda'(z)}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)},$$

qui est connue sous le nom de *Théorème de l'addition des fonctions elliptiques*. La démonstration que nous en avons donnée est due à M. Liouville.

169. Le même mode de raisonnement permet de trouver l'expression de $\mu(z+t)$ et celle de $\nu(z+t)$. La fonction impaire

$$\mu(z+t)-\mu(z-t),$$

dont les périodes sont ω et $\omega'+\frac{\omega}{2}$, admet les infinis de chacune des deux fonctions $\mu(z+t)$ et $\mu(z-t)$, et par conséquent les infinis des deux fonctions $\lambda(z+t)$ et $\lambda(z-t)$, comme précédemment. Pour annuler cette fonction, c'est-à-dire pour rendre $\mu(z+t)$ égale à $\mu(z-t)$, il faut que

$$z+t=\pm(z-t)+m\omega+n\left(\omega'+\frac{\omega}{2}\right),$$

d'où

$$z=m\frac{\omega}{2}+n\left(\frac{\omega'}{2}+\frac{\omega}{4}\right);$$

cette formule se décompose en deux

$$z = m'\frac{\omega}{2} + n'\omega',$$

$$z = (2m'+1)\frac{\omega}{4} + (2n'+1)\frac{\omega'}{2},$$

suivant que l'on attribue à n des valeurs paires ou impaires; la première comprend les zéros de $\lambda(z)$, la seconde ceux de $\nu(z)$. Ainsi les zéros de la fonction proposée sont ceux de la fonction

$$\mu'(z) = -\lambda(z)\nu(z).$$

On a donc

$$\mu(z+t) - \mu(z-t) = \frac{A\mu'(z)}{1 - k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}.$$

En prenant la dérivée et faisant $z = 0$, on trouve

$$2\mu'(t) = -A,$$

il en résulte

(3) $$\mu(z+t) - \mu(z-t) = \frac{-2\mu'(z)\mu'(t)}{1 - k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}.$$

La fonction paire

$$\mu(z+t) + \mu(z-t)$$

admet encore les mêmes infinis que la précédente. Cette fonction s'annulera si

$$\mu(z+t) = -\mu(z-t) = \mu\left(\frac{\omega}{2} + z - t\right),$$

ce qui exige que

$$z + t = \pm\left(\frac{\omega}{2} + z - t\right) + m\omega + n\left(\omega' + \frac{\omega}{2}\right),$$

d'où

$$z = -\frac{\omega}{4} + m\frac{\omega}{2} + n\left(\frac{\omega'}{2} + \frac{\omega}{4}\right);$$

cette formule se décompose en deux,

$$z = (2m'+1)\frac{\omega}{4} + n'\omega',$$

$$z = m'\frac{\omega}{2} + (2n'+1)\frac{\omega'}{2},$$

suivant que n est pair ou impair. La première comprend les zéros de $\mu(z)$, la seconde les infinis de $\lambda(z)$. On a donc

$$\mu(z+t)+\mu(z-t)=\frac{B\mu(z)}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}.$$

En faisant $z=0$, on trouve $2\mu(t)=B$. Ainsi

(4) $$\mu(z+t)+\mu(z-t)=\frac{2\mu(z)\mu(t)}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)},$$

et, par suite,

(II) $$\mu(z+t)=\frac{\mu(z)\mu(t)-\mu'(z)\mu'(t)}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}.$$

170. On obtiendra $\nu(z+t)$ de la même manière. La fonction impaire

$$\nu(z+t)-\nu(z-t),$$

dont les périodes sont $\frac{\omega}{2}$ et $2\omega'$, admet les infinis de $\lambda(z+t)$ et ceux de $\lambda(z-t)$; elle s'annule quand

$$\nu(z+t)=\nu(z-t),$$

c'est-à-dire quand

$$z+t=\pm(z-t)+m\frac{\omega}{2}+2n\omega',$$

ou

$$z=m\frac{\omega}{4}+n\omega';$$

cette formule se décompose en deux,

$$z=m'\frac{\omega}{2}+n\omega',$$

$$z=(2m'+1)\frac{\omega}{4}+n\omega',$$

suivant que m est pair ou impair; la première comprend les zéros de $\lambda(z)$, la seconde ceux de $\mu(z)$. Ainsi la fonction proposée admet les mêmes zéros que la fonction

$$\nu'(z)=-k^2\lambda(z)\mu(z).$$

On a donc

$$\nu(z+t)-\nu(z-t)=\frac{A\nu'(z)}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}.$$

En prenant la dérivée et faisant $z = 0$, on trouve

$$2\nu'(t) = -\mathrm{A}k^2;$$

d'où

(5) $$\nu(z+t) - \nu(z-t) = \frac{-2\frac{1}{k^2}\nu'(z)\nu'(t)}{1 - k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}.$$

La fonction paire

$$\nu(z+t) + \nu(z-t)$$

s'annule quand

$$\nu(z+t) = -\nu(z-t) = \nu(\omega' + z - t),$$

c'est-à-dire quand

$$z + t = \pm(\omega' + z - t) + m\frac{\omega}{2} + 2n\omega',$$

d'où

$$z = -\frac{\omega'}{2} + m\frac{\omega}{4} + n\omega';$$

cette formule se décompose en deux,

$$z = m'\frac{\omega}{2} + (2n+1)\frac{\omega'}{2},$$

$$z = (2m'+1)\frac{\omega}{4} + (2n+1)\frac{\omega'}{2},$$

suivant que m est pair ou impair : la première comprend l[es] infinis de $\lambda(z)$, la seconde les zéros de $\nu(z)$. On a donc

$$\nu(z+t) + \nu(z-t) = \frac{\mathrm{A}\nu(z)}{1 - k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}.$$

En faisant $z = 0$, on trouve $2\nu(t) = \mathrm{A}$; d'où

(6) $$\nu(z+t) + \nu(z-t) = \frac{2\nu(z)\nu(t)}{1 - k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)},$$

et, par suite,

(III) $$\nu(z+t) = \frac{\nu(z)\nu(t) - \frac{1}{k^2}\nu'(z)\nu'(t)}{1 - k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}.$$

171. Des formules précédentes, on déduit

$$\varpi(z+t) = \frac{\lambda(z+t)}{\mu(z+t)} = \frac{\lambda(z)\lambda'(t)+\lambda(t)\lambda'(z)}{\mu(z)\mu(t)-\mu'(z)\mu'(t)},$$

et, si l'on remplace les dérivées par leurs valeurs,

$$\text{(IV)} \qquad \varpi(z+t) = \frac{\varpi(z)\nu(t)+\varpi(t)\nu(z)}{1-\varpi(z)\varpi(t)\nu(z)\nu(t)}.$$

On en déduit encore la formule

$$\mu(z+t) = \mu(z)\mu(t) - \lambda(z)\lambda(t)\nu(z+t),$$

à laquelle on arrive par la considération d'un triangle sphérique.

On a aussi

$$\lambda(z-t) = \frac{\lambda(z)\lambda'(t)-\lambda(t)\lambda'(z)}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)},$$

et, par suite,

$$(7) \qquad \lambda(z+t)\lambda(z-t) = \frac{\lambda^2(z)-\lambda^2(t)}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}.$$

Addition des quadratures elliptiques de seconde espèce.

172. A la transcendante E de Legendre (n° 167), nous substituerons, avec Abel et Jacobi, la fonction monodrome impaire

$$\psi(z) = \int_0^z \lambda^2(z)\,dz,$$

avec laquelle elle a une relation très-simple et nous la désignerons par $\psi(z)$.

L'équation

$$\lambda(z+t)\lambda(z-t) = \frac{\lambda^2(z)-\lambda^2(t)}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)},$$

dans laquelle on met le développement de $\lambda(z+t)$, devient

$$[\lambda(z)\lambda'(t)+\lambda(t)\lambda'(z)]\lambda(z-t) = \lambda^2(z)-\lambda^2(t);$$

si l'on remplace z par $z+t$, et que l'on permute ensuite les lettres z et t, on a

$$[\lambda(z+t)\lambda'(z)+\lambda(z)\lambda'(z+t)]\lambda(t) = \lambda^2(z+t)-\lambda^2(z).$$

Le premier membre étant une différentielle exacte par rap-

port à z, on trouve en intégrant

$$\int_0^z \lambda^2(z+t)\,dz - \int_0^z \lambda^2(z)\,dz = \lambda(z)\lambda(t)\lambda(z+t).$$

Puisque

$$\int_0^z \lambda^2(z+t)\,dz = \int_t^{z+t} \lambda^2(z)\,dz = \int_0^{z+t} \lambda^2(z)\,dz - \int_0^t \lambda^2(z)\,dz,$$

on obtient l'équation

$$\text{(V)} \qquad \psi(z+t) = \psi(z) + \psi(t) + \lambda(z)\lambda(t)\lambda(z+t),$$

de laquelle on déduit facilement celle qui a été donnée par Legendre pour l'addition des fonctions de seconde espèce.

173. On peut déduire cette formule de l'expression de la fonction $\psi(z)$ à l'aide de la fonction Θ. On a (n° **161**)

$$(10) \qquad \psi(z) = \frac{1}{k^2}\left[z\theta''_1(0) - \frac{d\log\theta_1(z)}{dz}\right],$$

et, de même,

$$\psi(z+t) = \frac{1}{k^2}\left[(z+t)\theta''_1(0) - \frac{d\log\theta_1(z+t)}{dz}\right],$$

$$\psi(z-t) = \frac{1}{k^2}\left[(z-t)\theta''_1(0) - \frac{d\log\theta_1(z-t)}{dz}\right];$$

d'où

$$\psi(z+t) + \psi(z-t) - 2\psi(z) = -\frac{1}{k^2}\,\frac{d\log\dfrac{\theta_1(z+t)\theta_1(z-t)}{\theta_1^2(z)\theta_1^2(t)}}{dz}.$$

Puisque (n° **143**)

$$\frac{\theta_1(z+t)\theta_1(z-t)}{\theta_1^2(t)\theta_1^2(z)} = 1 - k^2\lambda^2(t)\lambda^2(z),$$

cette équation devient

$$\psi(z+t) + \psi(z-t) - 2\psi(z) = \frac{2\lambda^2(t)\lambda(z)\lambda'(z)}{1 - k^2\lambda^2(t)\lambda^2(z)}.$$

On en déduit, en permutant les lettres z et t,

$$\psi(z+t) - \psi(z-t) - 2\psi(t) = \frac{2\lambda^2(z)\lambda(t)\lambda'(t)}{1 - k^2\lambda^2(t)\lambda^2(z)},$$

et, par suite,

$$\psi(z+t)-\psi(z)-\psi(t)=\lambda(z)\lambda(t)\lambda(z+t).$$

Addition des quadratures elliptiques de troisième espèce.

174. Jacobi a substitué à la transcendante de troisième espèce de Legendre la fonction impaire

$$\int_0^z \frac{k^2\lambda(\alpha)\lambda'(\alpha)\lambda^2(z)}{1-k^2\lambda^2(\alpha)\lambda^2(z)}dz,$$

qu'il représente par le symbole $\Pi(z,\alpha)$, la variable z étant l'*argument*, la constante α le *paramètre*. Cette fonction s'exprime aussi à l'aide de la fonction Θ; on a (nº 162)

$$(11)\qquad \Pi(z,\alpha)=z\frac{d\log\theta_1(\alpha)}{d\alpha}+\frac{1}{2}\log\frac{\theta_1(z-\alpha)}{\theta_1(z+\alpha)}.$$

On a de même

$$\Pi(t,\alpha)=t\frac{d\log\theta_1(\alpha)}{d\alpha}+\frac{1}{2}\log\frac{\theta_1(t-\alpha)}{\theta_1(t+\alpha)},$$

$$\Pi(z+t,\alpha)=(z+t)\frac{d\log\theta_1(\alpha)}{d\alpha}+\frac{1}{2}\log\frac{\theta_1(z+t-\alpha)}{\theta_1(z+t+\alpha)},$$

et, par suite,

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned}&\Pi(z+t,\alpha)-\Pi(z,\alpha)-\Pi(t,\alpha)\\&=\frac{1}{2}\log\frac{\theta_1(t+\alpha)\theta_1(z+\alpha)\theta_1(z+t-\alpha)}{\theta_1(t-\alpha)\theta_1(z-\alpha)\theta_1(z+t+\alpha)}.\end{aligned}\right.$$

L'expression

$$F(z)=\frac{\theta_1(t+\alpha)}{\theta_1(t-\alpha)}\cdot\frac{\theta_1(z+\alpha)\theta_1(z+t-\alpha)}{\theta_1(z-\alpha)\theta_1(z+t+\alpha)},$$

dans laquelle nous regardons z comme la variable et que nous désignons par $F(z)$, est une fonction monodrome doublement périodique, aux périodes $\frac{\omega}{2}$ et ω', comme on le reconnaît aisément d'après les propriétés de la fonction Θ. En général, la fonction

$$\frac{\Theta(z+\alpha)\Theta(z+\beta)}{\Theta(z+\alpha')\Theta(z+\beta')}$$

admettra la seconde période ω' si la condition $\alpha+\beta=\alpha'+\beta'$ est vérifiée; ce qui a lieu dans le cas actuel. La fonction du second ordre $F(z)$ admet les deux zéros

$$z=-\alpha+\frac{\omega'}{2},\quad z=-t+\alpha+\frac{\omega'}{2},$$

et les deux infinis

$$z=\alpha+\frac{\omega'}{2},\quad z=-t-\alpha+\frac{\omega'}{2},$$

et se réduit à l'unité pour $z=0$.

On remarque que les infinis ne diffèrent des zéros que par le signe de α.

175. On peut exprimer de plusieurs manières cette fonction $F(z)$ au moyen de la fonction λ. Considérons la fonction doublement périodique du second ordre

$$f(z)=\lambda(z)\,\lambda(z+\beta)$$

aux périodes $\frac{\omega}{2}$, ω', aux deux infinis $z=\frac{\omega'}{2}$, $z=\frac{\omega'}{2}-\beta$, dont la somme est égale à $\omega'-\beta$. Pour exprimer la fonction $F(z)$ au moyen de la fonction $f(z)$, on posera

$$F(z)=A\,\frac{f(z+p)-f(q)}{f(z+p)-f(q')},$$

et l'on déterminera les constantes par les relations

$$-\alpha+\frac{\omega'}{2}+p=q,$$

$$-t+\alpha+\frac{\omega'}{2}+p=\omega'-\beta-q,$$

$$\alpha+\frac{\omega'}{2}+p=q',$$

$$-t-\alpha+\frac{\omega'}{2}+p=\omega'-\beta-q',$$

de manière que les deux zéros de $F(z)$ annulent le numérateur, et les deux infinis le dénominateur (n° 74). Ces quatre rela-

tions se réduisent à trois, et donnent

$$p = \frac{t-\beta}{2},$$

$$q = -\alpha + \frac{t-\beta}{2} + \frac{\omega'}{2},$$

$$q' = \alpha + \frac{t-\beta}{2} + \frac{\omega'}{2},$$

et l'on a

$$F(z) = A \frac{\lambda\left(z+\frac{t-\beta}{2}\right)\lambda\left(z+\frac{t+\beta}{2}\right) - \lambda\left(-\alpha+\frac{t-\beta}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)\lambda\left(-\alpha+\frac{t+\beta}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)}{\lambda\left(z+\frac{t-\beta}{2}\right)\lambda\left(z+\frac{t+\beta}{2}\right) - \lambda\left(\alpha+\frac{t-\beta}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)\lambda\left(\alpha+\frac{t+\beta}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)},$$

ou

$$F(z) = A \frac{1 - k^2\lambda\left(-\alpha+\frac{t-\beta}{2}\right)\lambda\left(-\alpha+\frac{t+\beta}{2}\right)\lambda\left(z+\frac{t-\beta}{2}\right)\lambda\left(z+\frac{t+\beta}{2}\right)}{1 - k^2\lambda\left(\alpha+\frac{t-\beta}{2}\right)\lambda\left(\alpha+\frac{t+\beta}{2}\right)\lambda\left(z+\frac{t-\beta}{2}\right)\lambda\left(z+\frac{t+\beta}{2}\right)}.$$

La valeur de β est arbitraire. Si l'on fait en particulier $\beta = t$, on a

$$(13) \qquad F(z) = \frac{1 + k^2\lambda(\alpha)\lambda(z)\lambda(t-\alpha)\lambda(z+t)}{1 - k^2\lambda(\alpha)\lambda(z)\lambda(t+\alpha)\lambda(z+t)}.$$

176. On arrive à une expression plus simple en employant les deux fonctions du second ordre

$$f(z) = \lambda(z)\lambda(z+t+\alpha),$$
$$f_1(z) = \lambda(z)\lambda(z+t-\alpha),$$

qui admettent, la première les deux infinis

$$z = \frac{\omega'}{2}, \qquad z = -t-\alpha+\frac{\omega'}{2},$$

dont la somme est $-t-\alpha+\omega'$, la seconde les deux infinis

$$z = \frac{\omega'}{2}, \qquad z = -t+\alpha+\frac{\omega'}{2},$$

dont la somme est $-t+\alpha+\omega'$. Considérons la fraction

$$A\frac{f(z)-f(q)}{f_1(z)-f(q')};$$

les valeurs $z = -t + \alpha + \frac{\omega'}{2}$, $z = -t - \alpha + \frac{\omega'}{2}$, rendant infinis, la première le dénominateur, la seconde le numérateur, la fraction admet déjà un zéro et un infini de $F(z)$. La valeur $z = \frac{\omega'}{2}$, qui rend infinis à la fois le numérateur et le dénominateur, n'est ni un zéro ni un infini de la fraction. Nous pouvons disposer des constantes q et q' de manière que les valeurs $z = -\alpha + \frac{\omega'}{2}$, $z = \alpha + \frac{\omega'}{2}$, annulent, la première le numérateur, la seconde le dénominateur; nous poserons pour cela

$$q = -\alpha + \frac{\omega'}{2},$$
$$q' = \alpha + \frac{\omega'}{2}.$$

Le second zéro du numérateur et celui du dénominateur étant égaux tous deux à $-t + \frac{\omega'}{2}$, ne rendent la fraction ni nulle ni infinie. On a donc

$$F(z) = A\,\frac{\lambda(z)\lambda(z+t+\alpha) - \lambda\left(-\alpha + \frac{\omega'}{2}\right)\lambda\left(t + \frac{\omega'}{2}\right)}{\lambda(z)\lambda(z+t-\alpha) - \lambda\left(\alpha + \frac{\omega'}{2}\right)\lambda\left(t + \frac{\omega'}{2}\right)},$$

ou

$$(14)\qquad F(z) = \frac{1 + k^2\lambda(\alpha)\lambda(z)\lambda(t)\lambda(z+t+\alpha)}{1 - k^2\lambda(\alpha)\lambda(z)\lambda(t)\lambda(z+t-\alpha)},$$

et, par suite,

$$(\text{VI})\qquad \left\{\begin{aligned} &\Pi(z+t,\alpha) - \Pi(z,\alpha) - \Pi(t,\alpha) \\ &= \frac{1}{2}\log\frac{1 + k^2\lambda(\alpha)\lambda(z)\lambda(t)\lambda(z+t+\alpha)}{1 - k^2\lambda(\alpha)\lambda(z)\lambda(t)\lambda(z+t-\alpha)}. \end{aligned}\right.$$

C'est la formule trouvée par Legendre.

177. On obtient encore une autre expression de la manière suivante. De l'équation (12) on déduit, en changeant le signe de t,

$$\begin{aligned} &\Pi(z-t,\alpha) - \Pi(z,\alpha) + \Pi(t,\alpha) \\ &= \frac{1}{2}\log\frac{\theta_1(t-\alpha)\theta_1(z+\alpha)\theta_1(z-t-\alpha)}{\theta_1(t+\alpha)\theta_1(z-\alpha)\theta_1(z-t+\alpha)}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}&\Pi(z+t)+\Pi(z-t)-2\Pi(z)\\&=\frac{1}{2}\log\frac{\theta_1^2(z+\alpha)\theta_1(z-\alpha+t)\theta_1(z-\alpha-t)}{\theta_1^2(z-\alpha)\theta_1(z+\alpha+t)\theta_1(z+\alpha-t)}\\&=\frac{1}{2}\log\frac{\dfrac{\theta_1(z-\alpha+t)\theta_1(z-\alpha-t)}{\theta_1^2(t)\theta_1^2(z-\alpha)}}{\dfrac{\theta_1(z+\alpha+t)\theta_1(z+\alpha-t)}{\theta_1^2(t)\theta_1^2(z+\alpha)}},\end{aligned}$$

et, en vertu de la relation (24) du n° **143** dans laquelle on remplace z par $z-\alpha$ ou par $z+\alpha$,

$$\Pi(z+t)+\Pi(z-t)-2\Pi(z)=\frac{1}{2}\log\frac{1-k^2\lambda^2(t)\lambda^2(z-\alpha)}{1-k^2\lambda^2(t)\lambda^2(z+\alpha)}.$$

On en déduit, en permutant les lettres z et t,

$$\Pi(z+t)-\Pi(z-t)-2\Pi(t)=\frac{1}{2}\log\frac{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t-\alpha)}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t+\alpha)},$$

d'où

$$(15)\quad\left\{\begin{aligned}&\Pi(z+t,\alpha)-\Pi(z,\alpha)-\Pi(t,\alpha)\\&=\frac{1}{4}\log\frac{[1-k^2\lambda^2(t)\lambda^2(z-\alpha)][1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t-\alpha)]}{[1-k^2\lambda^2(t)\lambda^2(z+\alpha)][1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t+\alpha)]}.\end{aligned}\right.$$

Il en résulte cette troisième expression de la fonction F (z),

$$F(z)=\sqrt{\frac{[1-k^2\lambda^2(t)\lambda^2(z-\alpha)][1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t-\alpha)]}{[1-k^2\lambda^2(t)\lambda^2(z+\alpha)][1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t+\alpha)]}}.$$

178. Nous nous sommes occupés de l'addition de l'argument dans les fonctions de troisième espèce; on obtient des formules analogues pour l'addition du paramètre.

Voyons d'abord ce que devient la fonction quand on permute l'argument et le paramètre. L'équation (11), en vertu de la formule (10), peut être mise sous la forme

$$(17)\qquad \Pi(z,\alpha)=\alpha z\theta_1''(0)-k^2z\psi(\alpha)+\frac{1}{2}\log\frac{\theta_1(z-\alpha)}{\theta_1(z+\alpha)}.$$

On a de même

$$\Pi(\alpha,z)=\alpha z\theta_1''(0)-k^2\alpha\psi(z)+\frac{1}{2}\log\frac{\theta_1(z-\alpha)}{\theta_1(z+\alpha)};$$

d'où

$$(18) \qquad \Pi(z, \alpha) - \Pi(\alpha, z) = k^2[\alpha\psi(z) - z\psi(\alpha)].$$

On en déduit

$$\Pi(z, \alpha+\beta) - \Pi(\alpha+\beta, z) = k^2[(\alpha+\beta)\psi(z) - z\psi(\alpha+\beta)],$$

et, en vertu des équations (V) et (VI),

$$(\text{VII}) \quad \left\{ \begin{aligned} & \Pi(z, \alpha+\beta) - \Pi(z, \alpha) - \Pi(z, \beta) \\ & = -k^2 z\lambda(\alpha)\lambda(\beta)\lambda(\alpha+\beta) \\ & + \frac{1}{2}\log\frac{1 + k^2\lambda(z)\lambda(\alpha)\lambda(\beta)\lambda(\alpha+\beta+z)}{1 - k^2\lambda(z)\lambda(\alpha)\lambda(\beta)\lambda(\alpha+\beta-z)}. \end{aligned} \right.$$

CHAPITRE II.

MULTIPLICATION.

Calcul de proche en proche.

179. Nous avons donné, n° **168**, la formule par laquelle on exprime $\lambda(z+t)$ en fonction de $\lambda(z)$ et de $\lambda(t)$; à l'aide de cette formule, on peut calculer successivement $\lambda(2z)$, $\lambda(3z), \ldots$; on trouve ainsi

$$\lambda(2z) = \frac{2\lambda(z)}{1 - k^2\lambda^4(z)}\lambda'(z),$$

$$(3z) = \lambda(z)\frac{3 - 4(1+k^2)\lambda^2(z) + 6k^2\lambda^4(z) - k^4\lambda^8(z)}{1 - 6k^2\lambda^4(z) + 4k^2(1+k^2)\lambda^6(z) - 3k^4\lambda^8(z)},$$

$$\lambda(4z) = \frac{4\lambda\lambda'[1 - 2(1+k^2)\lambda^2 + 5k^2\lambda^4 - 5k^4\lambda^8 + 2k^4(1+k^2)\lambda^{10} - k^6\lambda^{12}]}{1 - 20k^2\lambda^4 + 32k^2(1+k^2)\lambda^6 - k^2[16(1+k^2)^2 + 26k^2]\lambda^8 + 32k^4(1+k^2)\lambda^{10} - 20k^6\lambda^{12} + k}$$

On voit aisément que l'on obtient la valeur de $\lambda(nz)$ en multipliant une fraction rationnelle de $\lambda^2(z)$ par $\lambda(z)$ si n est impair, et par $\lambda(z)\,\lambda'(z)$ si n est pair. Mais, si l'on veut continuer ce calcul de proche en proche, la méthode précédente doit être modifiée, afin que les deux termes de la fraction par laquelle s'exprime $\lambda(nz)$ n'aient pas de facteurs communs. Voici la marche indiquée par Abel.

180. Si, dans la formule (n° 171)

$$\lambda(a+b)\lambda(a-b)=\frac{\lambda^2 a-\lambda^2 b}{1-k^2\lambda^2 a\lambda^2 b},$$

on fait

$$a=(m+1)z,\quad b=mz,$$

il vient

$$(1)\qquad \lambda(2m+1)z.\lambda z=\frac{\lambda^2(m+1)z-\lambda^2(mz)}{1-k^2\lambda^2(m+1)z.\lambda^2(mz)}.$$

On a, d'autre part,

$$(2)\qquad \lambda(2mz)=\frac{2\lambda(mz)\lambda'(mz)}{1-k^2\lambda^4(mz)}.$$

Ce sont les deux formules que nous allons employer.

Posons, en général,

$$\lambda(mz)=\frac{P_m}{Q_m},$$

Q_m étant un polynôme entier en $\lambda(z)$, P_m un autre polynôme entier si m est impair, et le produit d'un polynôme entier par $\lambda'(z)$ si m est pair; nous supposons dans tous les cas les deux polynômes premiers entre eux, et comme d'ailleurs les zéros de $\lambda'(z)$ ne rendent pas infini $\lambda(mz)$, la fraction $\frac{P_m^2}{Q_m^2}$ sera encore irréductible dans le cas où m est pair.

L'équation (2) donne

$$\frac{P_{2m}}{Q_{2m}}=\frac{2P_m Q_m\sqrt{(Q_m^2-P_m^2)(Q_m^2-k^2P_m^2)}}{Q_m^4-k^2P_m^4}=\frac{2P_mQ_mR_m}{Q_m^4-k^2P_m^4},$$

en désignant par R_m le radical $\sqrt{(Q_m^2-P_m^2)(Q_m^2-k^2P_m^2)}$. Les deux fonctions, $P_mQ_mR_m$, $Q_m^4-k^2P_m^4$, ne pouvant s'annuler simultanément, on a

$$(3)\qquad \begin{cases} P_{2m}=2P_mQ_mR_m,\\ Q_{2m}=Q_m^4-k^2P_m^4.\end{cases}$$

L'équation (1) donne

$$\frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}}=\frac{1}{\lambda(z)}\cdot\frac{P_{m+1}^2Q_m^2-P_m^2Q_{m+1}^2}{Q_{m+1}^2Q_m^2-k^2P_{m+1}^2P_m^2}.$$

Les polynômes, $P_{m+1}^2 Q_m^2 - P_m^2 Q_{m+1}^2$, $Q_{m+1}^2 Q_m^2 - k^2 P_{m+1}^2 P_m^2$, sont premiers entre eux. Supposons, en effet, qu'ils deviennent nuls pour une même valeur de $\lambda(z)$; cette valeur, ne pouvant annuler aucune des quantités P_m, Q_m, P_{m+1}, Q_{m+1}, satisferait aux équations

$$\lambda^2(m+1)z = \lambda^2(mz), \quad \lambda^2(m+1)z.\lambda^2(mz) = \frac{1}{k^2};$$

d'où

$$\lambda^2(m+1)z = \lambda^2(mz) = \pm\frac{1}{k}.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\lambda(2m+1)z &= \frac{\lambda(m+1)z.\lambda'(mz) + \lambda(mz)\lambda'(m+1)z}{1 - k^2\lambda^2(mz)\lambda^2(m+1)z} \\ &= \frac{\lambda^2(m+1)z - \lambda^2(mz)}{\lambda(m+1)z\lambda'(mz) - \lambda mz\lambda'(m+1)z};\end{aligned}$$

on devrait donc avoir pour cette valeur de $\lambda(z)$,

$$\begin{aligned}\lambda(m+1)z\lambda'(mz) + \lambda(mz)\lambda'(m+1)z = 0, \\ \lambda(m+1)z\lambda'(mz) - \lambda(mz)\lambda'(m+1)z = 0;\end{aligned}$$

d'où

$$\lambda(m+1)z.\lambda'(mz) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lambda^2(m+1)z[1 - \lambda^2(mz)][1 - k^2\lambda^2(mz)] = 0,$$

résultat incompatible avec la condition trouvée précédemment

$$\lambda^2(mz) = \lambda^2(m+1)z = \pm\frac{1}{k}.$$

On aura donc

$$(4) \quad \begin{cases} P_{2m+1} = \dfrac{1}{\lambda(z)}(P_{m+1}^2 Q_m^2 - P_m^2 Q_{m+1}^2), \\ Q_{2m+1} = Q_{m+1}^2 Q_m^2 - k^2 P_{m+1}^2 P_m^2. \end{cases}$$

Si l'on part des valeurs $P_1 = \lambda(z)$, $Q_1 = 1$, les formules (3) donneront P_2, Q_2, puis les formules (4) P_3, Q_3; les formules (3) donneront ensuite P_4, Q_4, puis les formules (4) P_5, Q_5, et ainsi de suite indéfiniment. On voit que P_n^2 est un polynôme du degré $2n^2$ ou du degré $2n^2 - 2$, suivant que n est impair

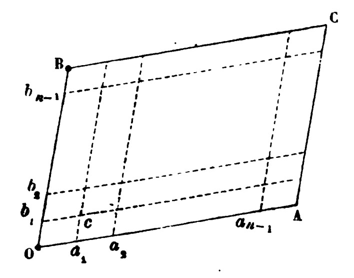
ou pair; comme dans le dernier cas il a pour facteur le polynôme du quatrième degré $\lambda'^2(z)$, il en résulte que P_n est un polynôme du degré n^2 si n est impair, et le produit de $\lambda'(z)$ par un polynôme du degré n^2-3 si n est pair. Q_n est un polynôme du degré n^2 ou n^2-1, suivant que n est pair ou impair. Nous observerons encore que Q_1 et Q_2 ne contenant pas de terme du second degré, il en sera de même de Q_3, Q_4, Q_5, ...

Calcul direct de $\lambda(nz)$.

181. On peut se proposer de déterminer directement $\lambda(nz)$, sans calculer $\lambda(2z)$, $\lambda(3z)$, ...

Supposons d'abord n impair. La fonction $\lambda(nz)$ est une fonction elliptique qui a pour périodes $\frac{\omega}{n}$, $\frac{\omega'}{n}$; ses infinis sont $\frac{\omega'}{2n}$, $\frac{\omega'}{2n}+\frac{\omega}{2n}$; ses zéros o, $\frac{\omega}{2n}$. Soit OACB (*fig.* 30) le parallélogramme élémentaire de la fonction $\lambda(z)$; divisons chacun des côtés OA, OB en n parties égales, Oa_1cb_1 sera le parallélogramme élémentaire de la fonction $\lambda(nz)$; le premier contient n^2 fois le second, il renferme $2n^2$ infinis de la fonction $\lambda(nz)$

Fig. 30.



$$\alpha=\frac{\omega'}{2n}+\frac{p\omega+q\omega'}{n},\quad \alpha'=\frac{\omega+\omega'}{2n}+\frac{p\omega+q\omega'}{n},$$

et $2n^2$ zéros,

$$a=\frac{p\omega+q\omega'}{n},\quad a'=\frac{\omega}{2n}+\frac{p\omega+q\omega'}{n},$$

chacun des nombres entiers p, q recevant les n valeurs o, 1, 2, ..., $n-1$. Les sommets des parallélogrammes de la fonction $\lambda(nz)$ correspondent aux zéros a, pour avoir les zéros a' il suffit de déplacer le réseau de la quantité $\frac{\omega}{2n}$; de même pour

avoir les infinis α, il suffit de déplacer le réseau de la quantité $\frac{\omega'}{2n}$; un second déplacement $\frac{\omega}{2n}$ donnera les infinis α'.

On peut grouper chacun des infinis α avec un infini α' de manière que leur somme soit équivalente à $\frac{\omega}{2}$; l'un des groupes est $\frac{\omega'}{2}$, $\frac{\omega+\omega'}{2}$. Soit L le produit de tous les facteurs binômes

$$[\lambda(z)-\lambda(\alpha_1)][\lambda(z)-\lambda(\alpha_2)]\ldots[\lambda(z)-\lambda(\alpha_{n^2-1})]$$

qui correspondent aux infinis α, $\frac{\omega'}{2}$ excepté; ce polynôme admet comme zéros tous les infinis α et α', excepté $\frac{\omega'}{2}$ et $\frac{\omega+\omega'}{2}$.

De même on peut grouper chacun des zéros a avec un zéro a' de manière que leur somme soit équivalente à $\frac{\omega}{2}$; l'un des groupes est o, $\frac{\omega}{2}$. Désignons par M le produit des facteurs binômes

$$[\lambda(z)-\lambda(a_1)][\lambda(z)-\lambda(a_2)]\ldots[\lambda(z)-\lambda(a_{n^2-1})],$$

qui correspondent aux zéros a, o excepté; ce polynôme admet comme zéros tous les zéros a et a', excepté o et $\frac{\omega}{2}$.

Les fonctions $\lambda(nz)$, $\frac{M\lambda(z)}{L}$ ont toutes deux pour périodes ω, ω'; la seconde ayant pour infinis simples $\frac{\omega'}{2}$, $\frac{\omega+\omega'}{2}$, puisque le degré du numérateur surpasse d'une unité celui du dénominateur, les infinis et les zéros sont les mêmes dans chaque parallélogramme, donc le rapport des fonctions est constant et l'on a

$$(5)\qquad \lambda(nz)=C\lambda(z)\frac{M}{L}.$$

On reconnaît facilement que les polynômes entiers M et L, qui sont du degré n^2-1, ne renferment que des puissances paires de $\lambda(z)$, puisque les infinis de la suite α, $\frac{\omega'}{2}$ excepté, et

les zéros de la suite a, o excepté, se réunissent par couples ayant pour somme ω.

182. Considérons maintenant le cas où n est pair. On peut réunir deux à deux les infinis α par couples ayant la somme $\frac{\omega}{2}$, et de même les infinis α'; aucun de ces infinis n'est égal à ceux de $\lambda(z)$. Appelons L le produit des n^2 facteurs binômes

$$[\lambda(z)-\lambda(\alpha_1)][\lambda(z)-\lambda(\alpha_2)]\ldots[\lambda(z)-\lambda(\alpha_{n^2})],$$

les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n^2}$, étant pris un dans chaque couple.

La suite a ou la suite a', suivant que n est de la forme $4n'$ ou de la forme $4n'+2$, comprend les termes $\pm\frac{\omega}{4}$, $\pm\frac{\omega}{4}+\frac{\omega'}{2}$ qui sont les zéros de $\lambda'(z)$, les autres termes de chacune de ces suites se groupent comme les infinis; l'un des groupes est $\frac{\omega'}{2}, \frac{\omega+\omega'}{2}$, un autre o, $\frac{\omega}{2}$. Désignons par N le produit des n^2-4 facteurs

$$[\lambda(z)-\lambda(a_1)][\lambda(z)-\lambda(a_2)]\ldots[\lambda(z)-\lambda(a_{n^2-4})]$$

dont chacun correspond à l'un des couples formés, excepté les quatre précédents.

Les fonctions $\lambda(nz)$, $\frac{N}{L}\lambda(z)\lambda'(z)$, aux périodes ω et ω', ont, dans chaque grand parallélogramme, les mêmes zéros et les mêmes infinis; car $\frac{N}{L}\lambda(z)\lambda'(z)$ devient nulle pour $z=\frac{\omega'}{2}$ et pour $z=\frac{\omega+\omega'}{2}$. On a donc

$$(6)\qquad \lambda(nz)=C\frac{N}{L}\lambda(z)\lambda'(z).$$

On reconnaît, comme dans le cas de n impair, que les deux polynômes N et L, le premier du degré n^2-4, le second du degré n^2, ne renferment que des puissances paires de $\lambda(z)$.

Calcul des coefficients.

183. Soit en premier lieu n impair, désignons $\lambda(nz)$ par ν,

$\lambda(z)$ par u, et posons

$$(7) \qquad v = \frac{a_0 u + a_2 u^3 + a_4 u^5 + \ldots + a_{n^2-1} u^{n^2}}{1 + b_2 u^2 + b_4 u^4 + \ldots + b_{n^2-1} u^{n^2-1}} = \frac{\varphi(u)}{\psi(u)}.$$

Si l'on fait z très-petit, le rapport $\frac{v}{u}$ tend vers n; donc $a_0 = n$.

Remplaçons z par $\frac{\omega'}{2} + z$; il vient

$$\lambda\left(n\frac{\omega'}{2} + nz\right) = \lambda\left(\frac{\omega'}{2} + nz\right) = \frac{1}{k\,\lambda(nz)};$$

u se change en $\frac{1}{ku}$ et v en $\frac{1}{kv}$; d'où

$$v = \frac{b_{n^2-1} u + b_{n^2-3} k^2 u^3 + b_{n^2-5} k^4 u^5 + \ldots + k^{n^2-1} u^{n^2}}{a_{n^2-1} + a_{n^2-3} k^2 u^2 + a_{n^2-5} k^4 u^4 + \ldots + a_0 k^{n^2-1} u^{n^2-1}}.$$

L'identification de cette valeur avec la précédente donne les relations

$$\frac{b_{n^2-1}}{a_{n^2-1}} = n,$$

$$k^2\frac{b_{n^2-3}}{a_{n^2-1}} = a_2,\ k^4\frac{b_{n^2-5}}{a_{n^2-1}} = a_4, \ldots,\ k^{n^2-3}\frac{b_2}{a_{n^2-1}} = a_{n^2-3},\ \frac{k^{n^2-1}}{a_{n^2-1}} = a_{n^2-1}$$

$$k^2\frac{a_{n^2-3}}{a_{n^2-1}} = b_2,\ k^4\frac{a_{n^2-5}}{a_{n^2-1}} = b_4, \ldots,\ k^{n^2-3}\frac{a_2}{a_{n^2-1}} = b_{n^2-3},\ \frac{k^{n^2-1} n}{a_{n^2-1}} = b_{n^2-1},$$

qui se réduisent à

$$a_{n^2-1} = k^{\frac{n^2-1}{2}},$$

$$b_{n^2-1} = nk^{\frac{n^2-1}{2}},\ k^2 b_{n^2-3} = a_2 k^{\frac{n^2-1}{2}},\ k^4 b_{n^2-5} = a_4 k^{\frac{n^2-1}{2}}, \ldots,\ k^{n-3} b_2 = a_{n^2-3} k^{\frac{n^2}{}}$$

Nous avons démontré (n° **180**) que l'on a $b_2 = 0$; la relation $k^2 a_{n^2-3} = b_2 a_{n^2-1}$ donne $a_{n^2-3} = 0$.

Il ne reste plus à déterminer que les $\frac{n^2-3}{2}$ quantités a_2, $a_4, \ldots, a_{n^2-3}$ et le signe de a_{n^2-1}. Pour y parvenir, on peut, par exemple, développer v, u et ses puissances, suivant les puissances ascendantes de la variable z et égaler les coefficients des

mêmes puissances de la variable dans les deux fonctions

$$v[1+b_2u^2+b_4u^4+\ldots],$$
$$u[n+a_2u^2+a_4u^4+\ldots];$$

on obtiendra ainsi autant d'équations du premier degré qu'on le voudra entre les coefficients inconnus.

L'identification des deux expressions de $\lambda(nz)$ montre que les deux fonctions φ et ψ satisfont aux relations suivantes :

$$\varphi\left(\frac{1}{ku}\right)=\frac{a_{n^2-1}}{k^{n^2}u^{n^2}}\psi(u),$$
$$\psi\left(\frac{1}{ku}\right)=\frac{a_{n^2-1}}{k^{n^2-1}u^{n^2}}\varphi(u).$$

184. Soit en second lieu n pair. Posons

$$(8)\quad v=\frac{a_0u+a_2u^3+a_4u^5+\ldots+a_{n^2-4}u^{n^2-3}}{1+b_2u^2+b_4u^4+\ldots+b_{n^2}u^{n^2}}\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}=\frac{\varphi(u)}{\psi(u)}.$$

Le coefficient a_0 est encore égal à n. Si l'on remplace z par $\frac{\omega'}{2}+z$, u se change en $\frac{1}{ku}$, v ne change pas, et l'on voit, d'après la relation

$$\lambda'\left(\frac{\omega'}{2}+z\right)=-\frac{\lambda'(z)}{k\lambda^2(z)},$$

qu'il faut remplacer

$$\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}\quad\text{par}\quad-\frac{1}{ku^2}\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}.$$

L'identification des deux expressions de v donne les relations

$$k^2\frac{a_{n^2-4}}{b_{n^2}}=-n,\; k^4\frac{a_{n^2-6}}{b_{n^2}}=-a_2,\ldots,\; k^{n^2-4}\frac{a^2}{b_{n^2}}=-a_{n^2-6},$$
$$k^{n^2-2}\frac{n}{b_{n^2}}=-a_{n^2-4}.$$

$$k^2\frac{b_{n^2-2}}{b_{n^2}}=b_2,\; k^4\frac{b_{n^2-4}}{b_{n^2}}=b_4,\ldots,\; k^{n^2-2}\frac{b_2}{b_{n^2}}=b_{n^2-2},\; \frac{k^{n^2}}{b_{n^2}}=b_{n^2};$$

d'où $\qquad b_{n^2-2}=0,\quad b_{n^2}=k^{\frac{n^2}{2}},\quad a_{\frac{n^2-4}{2}}=0.$

En substituant cette valeur de b_{n^2} dans les relations précédentes, on obtient les rapports de deux coefficients équidis-

tants des extrêmes dans les deux polynômes qui servent à exprimer la fonction v.

Les fonctions φ et ψ vérifient les deux relations

$$\varphi\left(\frac{1}{ku}\right) = \frac{b_{n^2}}{k^{n^2}u^{n^2}}\varphi(u),$$

$$\psi\left(\frac{1}{ku}\right) = \frac{b_{n^2}}{k^{n^2}u^{n^2}}\psi(u).$$

185. Les fonctions $\varphi(u)$ et $\psi(u)$ satisfont à deux équations différentielles du second ordre qui pourraient également servir à déterminer leurs coefficients.

On a en effet

$$\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = dz,$$

$$\frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} = d(nz) = ndz;$$

d'où

$$(1-u^2)(1-k^2u^2)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = n^2(1-v^2)(1-k^2v^2).$$

On peut écrire cette équation sous la forme

$$(1-u^2)(1-k^2u^2)\left(\frac{d\log v}{du}\right)^2 = n^2\left[\frac{1}{v^2} - (1+k^2) + k^2v^2\right];$$

on en déduit, en la différentiant,

$$(1-u^2)(1-k^2u^2)\frac{d^2\log v}{du^2} + [2k^2u^3 - (1+k^2)u]\frac{d\log v}{du}$$

$$= n^2\left(k^2v^2 - \frac{1}{v^2}\right).$$

Posons, pour abréger,

$$A = (1-u^2)(1-k^2u^2), \quad B = 2k^2u^3 - (1+k^2)u = \frac{1}{2}\frac{dA}{du},$$

puis remplaçons v par le quotient $\frac{\varphi(u)}{\psi(u)}$, l'équation précédente devient

$$\frac{A\left[\varphi\frac{d^2\varphi}{du^2} - \left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2\right] + B\varphi\frac{d\varphi}{du} + n^2\psi^2}{\varphi^2}$$

$$= \frac{A\left[\psi\frac{d^2\psi}{du^2} - \left(\frac{d\psi}{du}\right)^2\right] + B\psi\frac{d\psi}{du} + n^2k^2\varphi^2}{\psi^2}.$$

Si n est impair, les fonctions φ et ψ étant des polynômes premiers entre eux, les deux fractions précédentes ne peuvent devenir infinies pour aucune valeur finie de la variable u, et, par conséquent, se réduisent à des fonctions entières; il est facile de voir, en outre, que les degrés de leurs numérateurs surpassent de deux unités ceux des dénominateurs; donc les quotients sont du second degré et de la forme

$$Cu^2 + D.$$

En faisant $u = 0$ dans la seconde fraction, on obtient

$$D = \left(\frac{d^2\psi}{du^2}\right)_{u=0} = 2b_2 = 0.$$

En ordonnant les deux termes de la première par rapport aux puissances décroissantes de u, on trouve $n^2k^2u^2$ pour premier terme du quotient; ainsi

$$C = n^2k^2,$$

Les fonctions φ et ψ satisfont donc aux équations

$$(9)\quad \begin{cases} A\left[\varphi\dfrac{d^2\varphi}{du^2} - \left(\dfrac{d\varphi}{du}\right)^2\right] + B\varphi\dfrac{d\varphi}{du} + n^2[\psi^2 - k^2u^2\varphi^2] = 0, \\ A\left[\psi\dfrac{d^2\psi}{du^2} - \left(\dfrac{d\psi}{du}\right)^2\right] + B\psi\dfrac{d\psi}{du} + n^2k^2[\varphi^2 - u^2\psi^2] = 0. \end{cases}$$

186. Lorsque n est pair, la fonction φ est de la forme

$$\varphi = \varphi_1\sqrt{A},$$

φ_1 étant un polynôme entier du degré $n^2 - 3$. Les deux termes de la seconde fraction et le dénominateur de la première sont évidemment des polynômes entiers; par suite, le numérateur de celle-ci est nécessairement une fraction rationnelle, mais il est facile de reconnaître qu'il est aussi entier. Puisque les deux fonctions φ et ψ ne s'annulent jamais en même temps, ces fractions se réduisent, comme pour le cas de n impair, à un binôme

$$Cu^2 + D.$$

Si l'on fait $u = 0$ dans la seconde, on trouve

$$D = 2b_2 = 0.$$

Ordonnons les deux termes de celle-ci par rapport aux puissances décroissantes de u et faisons la division, le premier terme du quotient est $n^2 k^2 u^2$; il en résulte

$$C = n^2 k^2.$$

Les fonctions φ et ψ vérifient encore les équations (9).

CHAPITRE III.

DIVISION.

187. On donne $\lambda(z)$, il faut déterminer $\lambda\left(\frac{z}{n}\right)$, n étant un entier; c'est l'opération inverse de la précédente.

Dans la formule par laquelle on exprime $\lambda(nz)$ en fonction de $\lambda(z)$, remplaçons z par $\frac{z}{n}$, nous aurons l'équation à la résolution de laquelle se ramène la question proposée.

Considérons en premier lieu le cas où n est impair; désignons par v la fonction donnée $\lambda(z)$ et par u l'inconnue $\lambda\left(\frac{z}{n}\right)$. L'équation qui donne u est une équation du degré n^2 (n° 183),

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} & u\left(a_{n^2-1} u^{n^2-1} + a_{n^2-3} u^{n^2-3} \ldots + n\right) \\ & \qquad - v\left(b_{n^2-1} u^{n^2-1} + \ldots + 1\right) = 0; \end{aligned} \right.$$

ses racines sont les diverses valeurs que prend la fonction $\lambda\left(\frac{z}{n} + \frac{p\omega + q\omega'}{n}\right)$, dans laquelle les lettres p et q reçoivent toutes les valeurs entières de 0 à $n - 1$.

La somme des racines est égale à $v\frac{b_{n^2-1}}{a_{n^2-1}}$, et leur produit à

$\nu \frac{1}{a_{n^2-1}}$. Mais nous avons trouvé (n° 183)

$$\frac{b_{n^2-1}}{a_{n^2-1}} = n, \qquad a_{n^2-1} = k^{\frac{n^2-1}{2}};$$

il en résulte

$$(2)\ \lambda(z) = \frac{1}{n}\sum \lambda\left(\frac{z}{n} + \frac{p\omega + \varphi\omega'}{n}\right) = k^{\frac{n^2-1}{2}} \prod \lambda\left(\frac{z}{n} + \frac{p\omega + \varphi\omega'}{n}\right),$$

formules qu'il est facile de démontrer directement.

188. Abel a démontré que l'équation (1) jouit de la propriété remarquable d'être résoluble algébriquement. Soient en effet α et β deux racines quelconques de l'équation binôme

$$x^n - 1 = 0;$$

posons

$$\left\{\begin{aligned}
&\lambda\left(\frac{z}{n}\right) + \lambda\left(\frac{z}{n} + \frac{\omega}{n}\right)\alpha + \ldots\ldots\ldots\ldots + \lambda\left(\frac{z}{n} + (n-1)\frac{\omega}{n}\right)\alpha^{n-1} \\
&+ \lambda\left(\frac{z}{n} + \frac{\omega'}{n}\right)\beta + \lambda\left(\frac{z}{n} + \frac{\omega'}{n} + \frac{\omega}{n}\right)\beta\alpha + \ldots + \lambda\left(\frac{z}{n} + \frac{\omega'}{n} + (n-1)\frac{\omega}{n}\right)\beta\alpha^{n-1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \lambda\left(\frac{z}{n} + (n-1)\frac{\omega'}{n}\right)\beta^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}^n$$

$$= \left[\sum\sum \lambda\left(\frac{z}{n} + p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right)\alpha^p\beta^q\right]^n = F(z, \alpha, \beta).$$

La fonction F a pour périodes ω et ω'; car si l'on augmente z de ω, et que l'on multiplie chacun des termes de la parenthèse par α, ce qui revient à multiplier la puissance $n^{ième}$ par α^n ou par l'unité, les termes d'une même ligne horizontale se permutent circulairement; si l'on augmente z de ω', et si l'on multiplie par β, la permutation circulaire s'opère entre les termes d'une colonne verticale. La fonction $F(z, \alpha, \beta)$ peut donc s'exprimer rationnellement au moyen de $\lambda(z)$ et

de sa dérivée, et l'on a

$$\sum\sum\lambda\left(\frac{z}{n}+p\frac{\omega}{n}+q\frac{\omega'}{n}\right)\alpha^p\beta^q=\sqrt[n]{\frac{M+N\lambda'(z)}{L}},$$

L, M, N étant des fonctions entières de $\lambda(z)$.

Chaque couple α, β de racines de l'équation binôme fournira une équation analogue à la précédente. Si l'on ajoute membre à membre, en groupant ensemble les termes dans lesquels p et q ont les mêmes valeurs, on voit que le multiplicateur de chaque groupe est nul, à l'exception de celui du premier groupe qui se réduit à n^2. On aura donc pour $\lambda\left(\frac{z}{n}\right)$ une expression de la forme suivante :

$$(3)\qquad \lambda\left(\frac{z}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\left\{\begin{array}{l}\sqrt[n]{\dfrac{M_1+N_1\lambda'(z)}{L_1}}+\sqrt[n]{\dfrac{M_2+N_2\lambda'(z)}{L_2}}+\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\sqrt[n]{\dfrac{M_{n^2}+N_{n^2}\lambda'(z)}{L_{n^2}}}\end{array}\right\}.$$

Le premier radical, celui qui correspond à la combinaison $\alpha=\beta=1$, en vertu de la relation (2), a pour valeur $n\lambda(z)$.

189. On peut calculer les polynômes L_2, M_2, N_2, L_3,..., de la manière suivante.

Développons chacun des termes de la somme

$$\sum\sum\lambda\left(\frac{z}{n}+p\frac{\omega}{n}+q\frac{\omega'}{n}\right)\alpha^p\beta^q$$

d'après la formule qui donne $\lambda(z+t)$, cette somme prend la forme

$$R+S\lambda'\left(\frac{z}{n}\right),$$

R et S désignant des fractions rationnelles composées d'une manière bien déterminée avec $\lambda\left(\frac{z}{n}\right)$, $\lambda\left(\frac{\omega}{n}\right)$, $\lambda\left(\frac{\omega'}{n}\right)$ et les deux racines α, β de l'équation binôme. La puissance $n^{\text{ième}}$ de cette quantité est également connue et de même forme ; nous

la désignerons par

$$R_1 + S_1 \lambda'\left(\frac{z}{n}\right).$$

Imaginons actuellement que l'on calcule la fonction

$$F_1(z, \alpha, \beta) = \left[\sum\sum \lambda\left(\frac{z}{n} - p\frac{\omega}{n} - q\frac{\omega'}{n}\right)\alpha^p \beta^q\right]^n;$$

cette fonction admet, comme la première, les périodes ω, ω', et l'on voit facilement qu'elle s'exprime ainsi :

$$F_1(z, \alpha, \beta) = R_1 - S_1 \lambda'\left(\frac{z}{n}\right).$$

Puisque les deux fonctions F et F_1 restent invariables quand on augmente z de ω ou de ω', il en est de même de leur somme et de leur produit

$$2R_1, \quad R_1^2 - S_1^2 \lambda'^2\left(\frac{z}{n}\right).$$

Ces deux nouvelles fonctions étant des fractions rationnelles de $\lambda\left(\frac{z}{n}\right)$ qui ne doivent pas changer quand on remplace $\lambda\left(\frac{z}{n}\right)$ par l'une quelconque des racines de l'équation (1), on peut les exprimer par des fonctions symétriques des racines de cette équation, et, par suite, en fonction rationnelle de $\lambda(z)$.

Il résulte de ce qui précéde, *que l'on peut exprimer algébriquement* $\lambda\left(\frac{z}{n}\right)$ *en fonction de* $\lambda(z)$, *des racines* $n^{\text{ièmes}}$ *de l'unité, de* $\lambda\left(\frac{\omega}{n}\right)$ et de $\lambda\left(\frac{\omega'}{n}\right)$.

190. La formule par laquelle nous avons exprimé $\lambda\left(\frac{z}{n}\right)$ renferme $n^2 - 1$ radicaux d'indice n. Si l'on combinait leurs valeurs de toutes les manières possibles, le nombre des combinaisons surpasserait le nombre des valeurs de l'inconnue; il y a donc un choix à faire parmi ces diverses combinaisons. Nous allons exposer une solution plus simple du problème de la division qui ne présente pas cet inconvénient.

Posons

$$\varphi\left(\frac{z}{n}\right)=\lambda\left(\frac{z}{n}\right)+\lambda\left(\frac{z}{n}+\frac{\omega}{n}\right)+\lambda\left(\frac{z}{n}+2\frac{\omega}{n}\right)+\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\lambda\left(\frac{z}{n}+(n-1)\frac{\omega}{n}\right),$$

puis

$$\psi\left(\frac{z}{n},\alpha\right)=\left[\begin{array}{l}\varphi\left(\frac{z}{n}\right)+\alpha\varphi\left(\frac{z}{n}+\frac{\omega'}{n}\right)+\alpha^2\varphi\left(\frac{z}{n}+2\frac{\omega'}{n}\right)+\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots+\alpha^{n-1}\varphi\left(\frac{z}{n}+(n-1)\frac{\omega'}{n}\right)\end{array}\right]^n,$$

α étant une des racines de l'équation binôme $x^n-1=0$. La fonction $\psi\left(\frac{z}{n},\alpha\right)$ admet pour périodes ω et ω'; car lorsque z augmente de ω, $\varphi\left(\frac{z}{n}\right)$ ne change pas, et, si l'on augmente z de ω', en multipliant en même temps les termes de la parenthèse par α, les termes se permutent circulairement. La fonction $\psi\left(\frac{z}{n},\alpha\right)$ peut donc s'exprimer rationnellement à l'aide de $\lambda(z)$ et de sa dérivée. Soit

$$\psi\left(\frac{z}{n},\alpha\right)=\frac{A+B\lambda'(z)}{C},$$

A, B, C étant des polynômes entiers en $\lambda(z)$, que l'on calculera ainsi qu'il a été expliqué au numéro précédent pour $F(z,\alpha,\beta)$. On a donc

$$\varphi\left(\frac{z}{n}\right)+\alpha\varphi\left(\frac{z}{n}+\frac{\omega'}{n}\right)+\ldots+\alpha^{n-1}\varphi\left(\frac{z}{n}+(n-1)\frac{\omega'}{n}\right)$$
$$=\sqrt[n]{\frac{A+B\lambda'(z)}{C}}.$$

Si α désigne une racine primitive de l'équation binôme $x^n-1=0$, les n racines seront représentées par

$$\alpha^0,\ \alpha^1,\ \alpha^2,\ldots,\ \alpha^{n-1};$$

chacune d'elles donnera une équation analogue à la précédente; si l'on ajoute ces équations membre à membre, les termes de

chaque colonne verticale, à l'exception de la première, ayant une somme égale à zéro, il vient

$$(4)\quad \varphi\left(\frac{z}{n}\right)=\frac{1}{n}\left[\begin{array}{l}\sqrt[n]{\dfrac{A_0+B_0\lambda'(z)}{C_0}}+\sqrt[n]{\dfrac{A_1+B_1\lambda'(z)}{C_1}}+\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots+\sqrt[n]{\dfrac{A_{n-1}+B_{n-1}\lambda'(z)}{C_{n-1}}}\end{array}\right];$$

En vertu de la relation (2), le premier radical a pour valeur $n\lambda(z)$.

Le produit

$$\left[\begin{array}{l}\varphi\left(\dfrac{z}{n}\right)+\alpha\varphi\left(\dfrac{z}{n}+\dfrac{\omega'}{n}\right)+\alpha^2\varphi\left(\dfrac{z}{n}+2\dfrac{\omega'}{n}\right)+\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots+\alpha^{n-1}\varphi\left(\dfrac{z}{n}+(n-1)\dfrac{\omega'}{n}\right)\end{array}\right]^{n-p}$$

$$\times\left[\begin{array}{l}\varphi\left(\dfrac{z}{n}\right)+\alpha^p\varphi\left(\dfrac{z}{n}+\dfrac{\omega'}{n}\right)+\alpha^{2p}\varphi\left(\dfrac{z}{n}+2\dfrac{\omega'}{n}\right)+\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots+\alpha^{(n-1)p}\varphi\left(\dfrac{z}{n}+(n-1)\dfrac{\omega'}{n}\right)\end{array}\right]$$

ne change pas quand z augmente de ω'; ceci revient à diviser le premier facteur par α^{n-p} et le second par α^p; ce produit a aussi pour période ω; on peut donc l'exprimer en fonction rationnelle de $\lambda(z)$ et de sa dérivée; nous le représenterons par

$$\frac{F_p+G_p\lambda'(z)}{H_p}.$$

Il en résulte

$$(5)\quad \sqrt[n]{\frac{A_p+B_p\lambda'(z)}{C_p}}=\frac{\dfrac{F_p+G_p\lambda'(z)}{H_p}}{\dfrac{A_1+B_1\lambda'(z)}{C_1}}\left[\frac{A_1+B_1\lambda'(z)}{C_1}\right]^{\frac{p}{n}}.$$

On calcule les polynômes entiers F_p, G_p, H_p, de la même manière que les polynômes A, B, C. Quand on aura substitué à la place des divers radicaux leurs valeurs en fonction de $\sqrt[n]{\dfrac{A_1+B_1\lambda'(z)}{C_1}}$, l'expression de $\varphi\left(\dfrac{z}{n}\right)$ n'aura plus que n valeurs distinctes, ainsi que cela doit être.

191. La fonction $\varphi\left(\frac{z}{n}\right)$ étant déterminée, on cherche $\lambda\left(\frac{z}{n}\right)$. A cet effet, on pose

$$\chi\left(\frac{z}{n}, \alpha\right) = \left[\begin{array}{l}\lambda\left(\frac{z}{n}\right) + \alpha\lambda\left(\frac{z}{n}+\frac{\omega}{n}\right) + \alpha^2\lambda\left(\frac{z}{n}+2\frac{\omega}{n}\right)+\cdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha^{n-1}\lambda\left(\frac{z}{n}+(n-1)\frac{\omega}{n}\right)\end{array}\right]^n,$$

α désignant toujours l'une des racines de l'équation binôme $x^n - 1 = 0$. Les fonctions $\chi\left(\frac{z}{n}, \alpha\right)$ et $\varphi\left(\frac{z}{n}\right)$ ayant les mêmes périodes ω et $n\omega'$, on peut exprimer la première au moyen de la seconde et de sa dérivée, et l'on aura

$$\chi\left(\frac{z}{n}, \alpha\right) = \frac{a + b\varphi'\left(\frac{z}{n}\right)}{c},$$

a, b, c étant des polynômes entiers en $\varphi\left(\frac{z}{n}\right)$.

Si l'on développe chacun des termes $\lambda\left(\frac{z}{n}+p\frac{\omega}{n}\right)$, la valeur de $\chi\left(\frac{z}{n}, \alpha\right)$ se présentera sous la forme

$$\frac{A + B\lambda'\left(\frac{z}{n}\right)}{C},$$

A, B, C étant des polynômes entiers en $\lambda\left(\frac{z}{n}\right)$. La valeur de $\chi\left(\frac{z}{n}, \alpha\right)$ ne change pas quand on remplace $\lambda\left(\frac{z}{n}\right)$ par $\lambda\left(\frac{z}{n}+p\frac{\omega}{n}\right)$, c'est-à-dire lorsqu'on remplace $\lambda\left(\frac{z}{n}\right)$ par l'une quelconque des n racines de l'équation

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l}\varphi\left(\frac{z}{n}\right) = \lambda\left(\frac{z}{n}\right) + \lambda\left(\frac{z}{n}+\frac{\omega}{n}\right) + \lambda\left(\frac{z}{n}+2\frac{\omega}{n}\right)+\cdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \lambda\left(\frac{z}{n}+(n-1)\frac{\omega}{n}\right),\end{array}\right.$$

dans laquelle, après avoir développé chaque terme et remarqué que $\lambda'\left(\frac{z}{n}\right)$ disparaît, on regarde $\lambda\left(\frac{z}{n}\right)$ comme l'inconnue. Le calcul de $\chi\left(\frac{z}{n}, \alpha\right)$ en fonction de $\varphi\left(\frac{z}{n}\right)$ s'effectuera encore de la même manière que celui de $F(z, \alpha, \beta)$ en fonction de $\lambda(z)$, en remplaçant l'équation (1) par l'équation (6).

On aura ainsi

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\lambda\left(\frac{z}{n}\right)+\alpha\lambda\left(\frac{z}{n}+\frac{\omega}{n}\right)+\ldots+\alpha^{n-1}\lambda\left(\frac{z}{n}-(n-1)\frac{\omega}{n}\right)\\ &\qquad=\sqrt[n]{\frac{a+b\,\varphi'\left(\frac{z}{n}\right)}{c}}.\end{aligned}\right.$$

En opérant de la même manière pour chacune des racines $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$ de l'équation binôme, et ajoutant les résultats, on obtient la formule

$$(8)\quad \lambda\left(\frac{z}{n}\right)=\frac{1}{n}\left\{\begin{aligned}&\varphi\left(\frac{z}{n}\right)+\sqrt[n]{\frac{a_1+b_1\,\varphi'\left(\frac{z}{n}\right)}{c_1}}+\sqrt[n]{\frac{a_2+b_2\,\varphi'\left(\frac{z}{n}\right)}{c_2}}+\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\sqrt[n]{\frac{a_{n-1}+b_{n-1}\,\varphi'\left(\frac{z}{n}\right)}{c_{n-1}}}\end{aligned}\right\}.$$

Chacun des radicaux s'exprime par une puissance du premier; en effet, le produit

$$\left[\begin{aligned}&\lambda\left(\frac{z}{n}\right)+\alpha\lambda\left(\frac{z}{n}+\frac{\omega}{n}\right)+\alpha^2\lambda\left(\frac{z}{n}+\frac{2\omega}{n}\right)+\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\alpha^{n-1}\lambda\left(\frac{z}{n}+\frac{(n-1)\omega}{n}\right)\end{aligned}\right]^{n-p}$$

$$\times\left[\begin{aligned}&\lambda\left(\frac{z}{n}\right)+\alpha^{p}\lambda\left(\frac{z}{n}+\frac{\omega}{n}\right)+\alpha^{2p}\lambda\left(\frac{z}{n}+\frac{2\omega}{n}\right)+\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\alpha^{(n-1)p}\lambda\left(\frac{z}{n}+\frac{(n-1)\omega}{n}\right)\end{aligned}\right],$$

admettant les deux périodes ω et $n\omega'$ comme la fonction $\varphi\left(\frac{z}{n}\right)$, s'exprimera rationnellement au moyen de la fonction

$\varphi\left(\frac{z}{n}\right)$ et de sa dérivée ; nous le représenterons par $\frac{f_p + g_p \varphi'\left(\frac{z}{n}\right)}{h_p}$.
On déduit de là

$$(9)\quad \sqrt[n]{\frac{a_p + b_p \varphi'\left(\frac{z}{n}\right)}{c_p}} = \frac{\frac{f_p + g_p \varphi'\left(\frac{z}{n}\right)}{h_p}}{\frac{a_1 + b_1 \varphi'\left(\frac{z}{n}\right)}{c_1}} \times \left(\frac{a_1 + b_1 \varphi'\left(\frac{z}{n}\right)}{c_1}\right)^{\frac{p}{n}}.$$

De cette manière, à chaque valeur de $\varphi\left(\frac{z}{n}\right)$ correspondront n valeurs de $\lambda\left(\frac{z}{n}\right)$; comme la fonction $\varphi\left(\frac{z}{n}\right)$ a elle-même n valeurs, la fonction $\lambda\left(\frac{z}{n}\right)$ aura n^2 valeurs.

Voilà comment on procède quand le nombre n est impair; on peut même le supposer premier; car si l'on a $n = n'n''$, il sera préférable d'exprimer d'abord $\lambda\left(\frac{z}{n'}\right)$ au moyen de $\lambda(z)$, puis $\lambda\left(\frac{z}{n'n''}\right)$ au moyen de $\lambda\left(\frac{z}{n'}\right)$.

192. Considérons maintenant le cas où n est pair. Dans ce cas l'équation entre v et u renferme un radical du second degré (n° **184**); si on le fait disparaître, l'équation sera du degré $2n^2$ et ne renfermera que des puissances paires de l'inconnue.

Supposons d'abord $n = 2$. On a à résoudre l'équation

$$v = 2u \frac{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}{1-k^2u^4},$$

ou

$$(1-k^2u^4)^2(1-v^2) = (1-2u^2+k^2u^4)^2;$$

on en déduit

$$(10)\qquad u = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-k^2v^2}}{1+\sqrt{1-v^2}}}.$$

Les doubles valeurs des trois radicaux donnent les huit valeurs de u qui ne dépendent que de quantités toutes connues.

Le nombre pair n est en général de la forme $2^p . n'$, n' étant impair ; après avoir exprimé $\lambda\left(\frac{z}{n'}\right)$ au moyen de $\lambda(z)$, comme nous l'avons expliqué plus haut, on appliquera p fois successivement la formule précédente, afin d'obtenir $\lambda\left(\frac{z}{n}\right)$.

CHAPITRE IV.

MULTIPLICATION OU DIVISION DE L'UNE DES PÉRIODES D'UNE FONCTION ELLIPTIQUE PAR UN NOMBRE ENTIER.

193. Le calcul de $\lambda(nz)$ en fonction de $\lambda(z)$ revient à exprimer, au moyen de $\lambda(z)$, la fonction qui a pour périodes elliptiques $\frac{\omega}{n}$, $\frac{\omega'}{n}$, c'est-à-dire à diviser par n les deux périodes de la fonction donnée. De même, le calcul de $\lambda\left(\frac{z}{n}\right)$ en fonction de $\lambda(z)$ revient à déterminer la fonction dont les périodes elliptiques sont $n\omega$, $n\omega'$. Au lieu de diviser ou de multiplier simultanément les deux périodes par le nombre n, on peut se proposer d'exprimer, à l'aide de $\lambda(z)$, la fonction qui aurait une période commune avec $\lambda(z)$, et pour autre période la période correspondante de $\lambda(z)$ divisée ou multipliée par n. En répétant deux fois de suite la même opération sur les deux périodes ω, ω' de $\lambda(z)$ on retrouvera, soit $\lambda(nz)$, soit $\lambda\left(\frac{z}{n}\right)$.

Nous désignerons par k_1 le module de la fonction inconnue, et par g_1 son paramètre, de sorte que la fonction sera représentée par $\lambda(g_1 z, k_1)$. Nous nous occuperons d'abord de la division, en commençant par les cas les plus simples.

Division par deux.

194. Premier cas. *Division de la première période.* — Le produit $\lambda(z)\lambda\left(z+\frac{\omega}{4}\right)$ admet les périodes $\frac{\omega}{2}$, ω', il s'an-

nule pour $z = 0$ et $z = \frac{\omega}{4}$, et devient infini pour $z = \frac{\omega'}{2}$ et $z = \frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}$; d'ailleurs le parallélogramme $\left(\frac{\omega}{2}, \omega'\right)$ ne renferme pas d'autres zéros, ni d'autres infinis, que les précédents; on a donc

$$\lambda(g_1 z, k_1) = A\lambda(z)\lambda\left(z + \frac{\omega}{4}\right).$$

La constante A est donnée par la formule

$$\frac{1}{A} = \lambda\left(\frac{\omega}{8}\right)\lambda\left(\frac{\omega}{8} + \frac{\omega}{4}\right) = \lambda^2\left(\frac{\omega}{8}\right);$$

on a ensuite

$$g_1 = A, \quad \frac{1}{k_1} = A^2\lambda(z)\lambda\left(z + \frac{\omega}{4}\right)\lambda\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)\lambda\left(z + \frac{\omega'}{2} + \frac{\omega}{4}\right) = \frac{A^2}{k^2}.$$

Puisque

$$\lambda^2\left(\frac{\omega}{8}\right) = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - k^2}},$$

il en résulte

$$k_1 = \left(\frac{k}{1 + \sqrt{1 - k^2}}\right)^2, \qquad k = \frac{2\sqrt{k_1}}{1 + k_1}, \qquad g_1 = \frac{2}{1 + k_1},$$

(1) $$\lambda(g_1 z, k_1) = \frac{2}{1 + k_1}\lambda(z)\frac{\lambda'(z)}{1 - k^2\lambda^2(z)},$$

195. *Remarque.* — La valeur de $\lambda\left(\frac{\omega}{8}\right)$, dont nous nous sommes servis, s'obtient par la formule

$$\lambda\left(\frac{\omega}{8}\right) = \lambda\left(\frac{\omega}{4} - \frac{\omega}{8}\right) = \frac{\lambda'\left(\frac{\omega}{8}\right)}{1 - k^2\lambda^2\left(\frac{\omega}{8}\right)}.$$

On trouve ainsi les quatre valeurs de $\lambda\left(\frac{\Omega}{8}\right)$, en désignant par Ω et Ω' un système quelconque de périodes elliptiques de la fonction $\lambda(z)$, c'est-à-dire en posant (n° 90)

$$\Omega = (4a + 1)\omega + 4b\omega',$$
$$\Omega' = 2c\omega + (2d + 1)\omega',$$

avec la condition

$$(4a+1)(2d+1)-8bc=\pm 1.$$

Ces quatre valeurs sont celles de

$$\lambda\left(\frac{\omega}{8}\right),\quad \lambda\left(\frac{\omega}{8}+\frac{\omega}{2}\right),\quad \lambda\left(\frac{\omega}{8}+\frac{\omega'}{2}\right),\quad \lambda\left(\frac{\omega}{8}+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right);$$

elles sont deux à deux égales et de signes contraires; la première et la troisième, ainsi que la seconde et la quatrième, ont pour produit $\frac{1}{k}$. Le calcul précédent comprend la division par deux de la première période Ω de l'un quelconque des systèmes de périodes elliptiques.

196. Second cas. *Division de la seconde période.* — Partageons en deux parties égales, par une parallèle à OA, le parallélogramme élémentaire OACB (*fig.* 31) de la fonction $\lambda(z, k)$; OAC'B' sera le parallélogramme élémentaire de la seconde fonction. A une valeur de $\lambda(z, k)$ correspondent, dans le parallélogramme OACB, deux valeurs de z, dont la somme est égale à $\frac{\omega}{2}$; pour ces deux valeurs de z, la fonction $\lambda(g_1 z, k_1)$ a une valeur unique. A une valeur de $\lambda(g_1 z, k_1)$ correspondent, dans le parallélogramme OACB, quatre valeurs de z, que l'on peut réunir par couples

Fig. 31.

$$z,\quad \frac{\omega}{2}-z \quad \text{et} \quad z+\frac{\omega'}{2},\quad \frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}-z.$$

Les valeurs de $\lambda(z, k)$, pour les valeurs de z d'un même couple, sont égales; de plus les deux valeurs différentes de $\lambda(z, k)$ ont pour produit $\frac{1}{k}$. De ce qui précède il résulte que la fonction $\lambda(g_1 z, k_1)$ est une fonction rationnelle du second degré en $\lambda(z, k)$,

$$\lambda_1(g_1 z,\ k_1)=\frac{a+b\lambda(z)+c\lambda^2(z)}{a'+b'\lambda(z)+c'\lambda^2(z)}.$$

La constante a est égale à zéro, puisque $\lambda(g_1 z, k_1)$ s'annu avec z. Pour que le produit des valeurs de $\lambda(z, k)$ qui corre pondent à une valeur quelconque de $\lambda(g_1 z, k_1)$, soit $\frac{1}{k}$, il fa que l'on ait

$$c = 0, \quad c' = a'k.$$

La fonction $\lambda(g_1 z, k_1)$ étant impaire, on a

$$b' = 0,$$

ce qui donne la formule

$$\lambda(g_1 z, k_1) = A \frac{\lambda(z)}{1 + k\lambda^2(z)}.$$

Si l'on fait

$$z = \frac{\omega}{4},$$

il vient

$$1 = A \frac{1}{1+k}, \quad A = 1 + k;$$

d'où

(2) $$\lambda(g_1 z, k_1) = (1+k) \frac{\lambda(z)}{1 + k\lambda^2(z)}.$$

On a ensuite

$$g_1 = A, \quad \frac{1}{k_1} = A^2 \frac{\lambda(z)}{1 + k\lambda^2(z)} \frac{\lambda\left(\frac{\omega'}{4} + z\right)}{1 + k\lambda^2\left(\frac{\omega'}{4} + z\right)}.$$

Pour obtenir la valeur constante du second membre de cet dernière équation, on remplace z par $\frac{\omega}{4}$, ce qui donne

$$\frac{1}{k_1} = A^2 \frac{1}{1+k} \frac{\lambda\left(\frac{\omega' + \omega}{4}\right)}{1 + k\lambda^2\left(\frac{\omega' + \omega}{4}\right)}.$$

Mais de la relation

$$\lambda(z)\lambda\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) = \frac{1}{k}$$

on déduit, en y faisant $z = \frac{\omega}{4} - \frac{\omega'}{4}$,

$$\lambda\left(\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{4}\right)\lambda\left(\frac{\omega}{4} - \frac{\omega'}{4}\right) = \frac{1}{k};$$

d'ailleurs

$$\lambda\left(\frac{\omega}{4}+z\right)=\lambda\left(\frac{\omega}{4}-z\right).$$

Par conséquent,

$$\lambda^2\left(\frac{\omega}{4}+\frac{\omega'}{4}\right)=\frac{1}{k},\quad \lambda\left(\frac{\omega}{4}+\frac{\omega'}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Il en résulte

$$k_1=\frac{2\sqrt{k}}{1+k}.$$

197. Si, après avoir divisé par 2 la première période ω de la fonction $\lambda(z, k)$, on divise encore par 2 la seconde période ω' de la nouvelle fonction, la troisième fonction aura pour périodes $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega'}{2}$ et l'on arrivera ainsi à $\lambda(2z, k)$. On peut vérifier aisément ce résultat.

Par la première transformation, on obtient

$$\lambda(g_1 z, k_1)=\frac{2}{1+k_1}\lambda(z)\sqrt{\frac{1-\lambda^2 z}{1-k^2\lambda^2 z}},\quad k=\frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1},\quad g_1=\frac{2}{1+k_1}.$$

La seconde donne

$$\lambda(g_2 z, k_2)=(1+k_1)\frac{\lambda(g_1 z, k_1)}{1+k_1\lambda^2(g_1 z, k_1)}$$

$$=\frac{2\lambda(z)\sqrt{(1-\lambda^2 z)\ (1-k^2\lambda^2 z)}}{1-k^2\lambda^4(z)}=\lambda(2z, k),$$

$$k_2=\frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1}=k,\quad \frac{g_2}{g_1}=(1+k_1),\quad g_2=g_1(1+k_1)=2.$$

Division par un nombre impair quelconque.

198. Premier cas. *Division de la première période.* — Soient Ω et Ω' deux périodes elliptiques quelconques de la fonction proposée ; le produit

$$\lambda(z)\lambda\left(z+\frac{\Omega}{n}\right)\lambda\left(z+2\frac{\Omega}{n}\right)\cdots\lambda\left(z+(n-1)\frac{\Omega}{n}\right)$$

admet les périodes $\frac{\Omega}{n}$, Ω' ; car les facteurs se permutent circulairement quand z augmente de $\frac{\Omega}{n}$ et chacun d'eux admet la

période Ω'. Le facteur $\lambda(z)$ devient nul pour $z=0$ et infini pour $z=\frac{\Omega'}{2}$, le facteur $\lambda\left(z+\frac{n-1}{2}\frac{\Omega}{n}\right)$ devient nul pour $z=\frac{\Omega}{2n}$ et infini pour $z=\frac{\Omega}{2n}+\frac{\Omega'}{2}$; d'ailleurs le parallélogramme des périodes $\frac{\Omega}{n}$, Ω' ne renferme pas d'autres zéros, ni d'autres infinis du produit que les précédents; on a donc

$$(3)\qquad \lambda(g_1 z, k_1)=A\lambda(z)\lambda\left(z+\frac{\Omega}{n}\right)\cdots\lambda\left(z+(n-1)\frac{\Omega}{n}\right).$$

En mettant à part le facteur $\lambda(z)$, et groupant deux à deux les facteurs de la forme

$$\lambda\left(z+p\frac{\Omega}{n}\right),\quad \lambda\left(z+(n-p)\frac{\Omega}{n}\right)=\lambda\left(z-p\frac{\Omega}{n}\right),$$

d'après la formule (7) du n° **171**, ce qui donne

$$\lambda\left(z+p\frac{\Omega}{n}\right)\lambda\left(z-p\frac{\Omega}{n}\right)=\frac{\lambda^2(z)-\lambda^2\left(p\frac{\Omega}{n}\right)}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2\left(p\frac{\Omega}{n}\right)},$$

on voit que la fonction $\lambda(g_1 z, k_1)$ s'exprime par une fraction rationnelle impaire en $\lambda(z)$, du degré n.

On obtient la constante A en faisant

$$z=\frac{\Omega}{4n},$$

d'où

$$\frac{1}{A}=\lambda\left(\frac{\Omega}{4n}\right)\lambda\left(\frac{\Omega}{4n}+\frac{\Omega}{n}\right)\lambda\left(\frac{\Omega}{4n}+2\frac{\Omega}{n}\right)\cdots\lambda\left(\frac{\Omega}{4n}+(n-1)\frac{\Omega}{n}\right).$$

L'une des quantités $\frac{\Omega}{4n}+p\frac{\Omega}{n}$ est égale à $\frac{\Omega}{4}$ ou à $\frac{3\Omega}{4}$ suivant que n est de la forme $4n'+1$ ou de la forme $4n'-1$, et comme

$$\frac{\Omega}{4}=\frac{\omega}{4},$$

il en résulte

$$\frac{1}{A}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\lambda\left(\frac{\omega}{4}+\frac{\Omega}{n}\right)\lambda\left(\frac{\omega}{4}+2\frac{\Omega}{n}\right)\cdots\lambda\left(\frac{\omega}{4}+(n-1)\frac{\Omega}{n}\right),$$

ou

$$(4)\quad \frac{1}{A}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\lambda^2\left(\frac{\omega}{4}-\frac{\Omega}{n}\right)\lambda^2\left(\frac{\omega}{k}-2\frac{\Omega}{n}\right)\cdots\lambda^2\left(\frac{\omega}{4}-\frac{n-1}{2}\frac{\Omega}{n}\right).$$

De la relation

$$\frac{1}{k_1}=\lambda(g_1 z, k_1)\lambda\left(g_1\left(z+\frac{\Omega'}{2}\right), k_1\right)$$

on déduit

$$(5)\qquad \frac{1}{k_1}=A^2\frac{1}{k^n},\quad k_1=\frac{k^n}{A^2}.$$

Si l'on prend la dérivée des deux membres de l'équation (3), et si l'on fait $z=0$, on obtient la relation

$$\left\{\begin{aligned} g_1 &= A\lambda\left(\frac{\Omega}{n}\right)\lambda\left(2\frac{\Omega}{n}\right)\lambda\left(3\frac{\Omega}{n}\right)\cdots\lambda\left((n-1)\frac{\Omega}{n}\right)\\ &=(-1)^{\frac{n-1}{2}}A\lambda^2\left(\frac{\Omega}{n}\right)\lambda^2\left(2\frac{\Omega}{n}\right)\cdots\lambda^2\left(\frac{n-1}{2}\frac{\Omega}{n}\right),\end{aligned}\right.$$

et, par suite,

$$(6)\quad g_1=\frac{\lambda^2\left(\frac{\Omega}{n}\right)\lambda^2\left(2\frac{\Omega}{n}\right)\cdots\lambda^2\left(\frac{n-1}{2}\frac{\Omega}{n}\right)}{\lambda^2\left(\frac{\omega}{4}-\frac{\Omega}{n}\right)\lambda^2\left(\frac{\omega}{n}-2\frac{\Omega}{n}\right)\cdots\lambda^2\left(\frac{\omega}{4}-\frac{n-1}{2}\frac{\Omega}{n}\right)}.$$

199. SECOND CAS. *Division de la seconde période.* — Substituons comme précédemment aux deux périodes ω, ω' deux périodes elliptiques quelconques Ω, Ω' et supposons que l'on veuille diviser par n la période Ω'.

On trouve par la même méthode

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}&\lambda(g_2 z, k_2)\\ &=A'\lambda(z)\lambda\left(z+\frac{\Omega'}{n}\right)\lambda\left(z+2\frac{\Omega'}{n}\right)\cdots\lambda\left(z+(n-1)\frac{\Omega'}{n}\right),\end{aligned}\right.$$

période Ω'. Le facteur λ'

fini pour $z = \Omega'$ $\ldots \lambda^2\left(\frac{\omega}{4} - \frac{n-1}{2}\frac{\Omega'}{n}\right)$,

pour $z =$

logran

$$\frac{\lambda^2\left(\frac{\Omega'}{n}\right)\lambda^2\left(2\frac{\Omega'}{n}\right)\cdots\lambda^2\left(\frac{n-1}{2}\frac{\Omega'}{n}\right)}{\lambda^2\left(\frac{\omega}{4}-\frac{\Omega'}{n}\right)\lambda^2\left(\frac{\omega}{4}-2\frac{\omega'}{n}\right)\cdots\lambda^2\left(\frac{\omega}{4}-\frac{n-1}{2}\frac{\Omega'}{n}\right)}.$$

ni d

300. La détermination complète des fonctions inconnues ne dépend que de celle de $\lambda\left(\frac{\Omega}{n}\right)$ ou de $\lambda\left(\frac{\Omega'}{n}\right)$; ces quantités sont deux des racines de l'équation que l'on obtient en égalant à zéro l'expression de $\lambda(nz)$ en fonction de $\lambda(z)$, équation du degré n^2-1, après la suppression du facteur $\lambda(z)$. Nous allons chercher le nombre des fonctions différentes obtenues en divisant l'une des périodes par le nombre impair n.

Nous ne regarderons pas comme distinctes deux fonctions égales et de signes contraires, ni comme modules distincts deux modules égaux de signes contraires, ce qui nous permettra de remplacer les périodes ω, ω' de la fonction $\lambda(z)$ par les deux périodes Ω et Ω' définies par les formules

$$\Omega = (2a+1)\omega + 4b\omega',$$
$$\Omega' = c\omega + d\omega',$$

pourvu que l'on ait

$$(2a+1)d - 4bc = \pm 1;$$

et, dans la question actuelle, nous appliquerons à ces périodes la dénomination de *périodes elliptiques*. De cette manière on peut dire que les fonctions fournies par la division de la seconde période sont les mêmes que celles qui proviennent de la division de la première période. En effet, les périodes elliptiques Ω, $\frac{\Omega'}{n}$, peuvent être remplacées par

$$\Omega_1 = (2\alpha+1)\Omega + 4\beta\frac{\Omega'}{n},$$
$$\Omega'_1 = \gamma\Omega + \delta\frac{\Omega'}{n},$$

ourvu que l'on ait

$$(2\alpha+1)\delta-4\beta\gamma=\pm 1.$$

Mais si l'on prend $\delta=n$, ce qui est permis, on obtient les périodes

$$\Omega_1=\frac{[(2\alpha+1)(2a+1)n+4\beta c]\omega+4[(2\alpha+1)bn+d\beta d]\omega'}{n},$$

$$\Omega'_1=[(2a+1)\gamma+c]\omega+(4b\gamma+d)\omega',$$

qui résultent de la division par n de la première période d'un certain couple de périodes elliptiques de la fonction proposée. On verrait de même que les périodes elliptiques $\frac{\Omega}{n}$, Ω' peuvent être ramenées à la division par n de la seconde période.

201. Supposons maintenant que l'on divise par n la première période du couple Ω, Ω'. Les périodes $\frac{\Omega}{n}$, Ω', de la nouvelle fonction peuvent être remplacées par

$$\Omega_1=(2\alpha+1)\frac{\Omega}{n}+4\beta\Omega',$$

$$\Omega'_1=\gamma\frac{\Omega}{n}+\delta\Omega',$$

pourvu que l'on ait

$$(2\alpha+1)\delta-4\beta\gamma=\pm 1,$$

Remplaçons Ω et Ω' par leurs valeurs dans les expressions de Ω_1 et Ω'_1, il vient

$$\Omega_1=\frac{[(2\alpha+1)(2a+1)+4\beta nc]\omega+4[(2\alpha+1)b+\beta nd]\omega'}{n},$$

$$\Omega'_1=\frac{[\gamma(2a+1)+\delta nc]\omega+[\gamma.4b+\delta nd]\omega'}{n}.$$

Soit n' le plus grand commun diviseur entre $2a+1$ et n; posons $(2a+1)=(2a'+1)n'$, $n=n'n''$. Prenons $\gamma=-n''c$,

$\delta = 2a' + 1$; la relation $(2\alpha + 1)\delta - 4\beta\gamma = \pm 1$ devient

$$(2a'+1)(2\alpha+1) + 4\beta n''c = \pm 1.$$

On choisira α et β de manière à vérifier cette relation. D'après cela les valeurs de Ω_1 et de Ω'_1 prennent la forme

$$\Omega_1 = \frac{n'\omega + 4q\omega'}{n},$$

$$\Omega'_1 = \frac{n''\omega'}{n},$$

q étant un entier quelconque. Lorsque q augmente d'un multiple de n'', la fonction ne change pas; il suffira donc de donner à cette variable les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n''-1$. D'ailleurs les n'' fonctions ainsi obtenues sont différentes entre elles; car il est impossible de ramener les périodes elliptiques de l'une à celles de l'autre.

Le même partage du nombre n donne encore n' fonctions distinctes aux périodes

$$\Omega_1 = \frac{n''\omega + 4q\omega'}{n},$$

$$\Omega'_1 = \frac{n'\omega'}{n},$$

fonctions qui diffèrent des précédentes. Ainsi chaque partage en un produit de deux facteurs $n'n''$ fournit $n' + n''$ fonctions distinctes. Un second partage en deux facteurs $n'_1 n''_1$ donnera encore $n'_1 + n''_1$ fonctions différentes.

De ce qui précède il résulte que :

1°. *Si* n *est premier, le nombre des fonctions est* $n + 1$;

2°. *Si* n *est un nombre composé, le nombre des fonctions est égal à la somme* N *des diviseurs de* n.

202. *Remarque.*—Soient n et n' deux nombres entiers impairs et premiers entre eux, les fonctions que l'on obtient en divisant la première période de $\lambda(z)$ par n et la seconde par n' sont comprises dans celles que donne la division de la première période par le produit nn'. Si n et n' ont un plus grand commun diviseur d et que l'on pose $n = n_1 d$, $n' = n'_1 d$, pour diviser les deux périodes respectivement par n et n', on cher-

chera d'abord $\lambda(dz, k)$, puis on divisera par $n_1 n'_1$ la première période de cette fonction.

203. D'après ce que nous avons dit au n° 91, quand deux fonctions elliptiques ont même module, les systèmes de périodes elliptiques se correspondent deux à deux de manière à présenter le même rapport. On voit aisément que les fonctions dont nous venons de parler ne jouissent pas de cette propriété et qu'elles ont, par conséquent, des modules différents. Ainsi le module k_1 a autant de valeurs qu'il y a de fonctions différentes. L'équation entre les modules k et k_1 jouit de diverses propriétés, parmi lesquelles nous indiquerons les suivantes, données par Jacobi.

L'équation modulaire est symétrique par rapport à k et k_1. En effet, si, après avoir divisé par n la première période de la première fonction, on divise par n la seconde période de la deuxième fonction, on revient au module primitif; c'est-à-dire que, si l'équation est vérifiée par $k=\alpha$, $k_1=\beta$, elle doit l'être également par $k=\beta$, $k_1=\alpha$.

204. La fonction elliptique, qui a le module complémentaire k' et pour paramètre l'unité, admet les périodes elliptiques $\frac{2\omega}{i}$ et $\frac{\omega i}{2}$ (n° 107); de même la fonction elliptique dont le module est k'_1 et le paramètre g_1, admet les périodes elliptiques $\frac{2\omega'}{i}$ et $\frac{\omega i}{2n}$; c'est-à-dire que le module k'_1 correspond à la division par n de la seconde période de la première fonction. La relation entre k' et k'_1 est la même que celle entre k et k_1; donc l'équation modulaire ne change pas lorsqu'on y remplace k et k_1 respectivement par $\sqrt{1-k^2}$ et $\sqrt{1-k_1^2}$.

La fonction $\lambda\left(kz, \frac{1}{k}\right)$ a pour périodes elliptiques $\omega-2\omega'$ et ω'; la fonction $\lambda\left(g_1 k_1 z, \frac{1}{k_1}\right)$ a pour périodes elliptiques le système $\frac{\omega}{n}-2\omega'$ et ω' qui est équivalent à $\frac{\omega-2\omega'}{n}$ et ω'. L'équa-

tion modulaire ne doit pas changer quand on y remplace k par $\frac{1}{k}$ et k_1 par $\frac{1}{k_1}$.

Lorsque le module k est réel et moindre que l'unité, si l'on choisit les périodes elliptiques indiquées au n° 109, et si l'on prend leur rapport ρ, on voit que, quand on divise par n l'une ou l'autre des deux périodes ω, ω', le nouveau module est réel; il diminue si l'on divise la première période, il augmente au contraire si l'on divise la seconde. Quand n est un nombre composé, si on le partage en deux facteurs n' et n'' premiers entre eux, la division des périodes respectivement par les nombres n' et n'' donne également une valeur réelle de k_1.

Multiplication par un nombre entier quelconque.

205. C'est l'opération inverse de la précédente. Si le multiplicateur est le nombre 2, la fonction inconnue s'obtient par la résolution d'une équation bi-carrée (n° 194), ou d'une équation du second degré (n° 196), suivant qu'il s'agit de la première ou de la seconde période. Si le multiplicateur est un nombre impair n, la fonction inconnue est racine d'une équation du degré n (n° 198). Dans le premier cas le module k s'exprime en fonction de k_1 par les formules des n°s 194 et 196; dans le second cas, il dépend d'une équation dont le degré est la somme des diviseurs de n.

Lorsque n est impair, l'équation du degré n, qui donne la fonction inconnue, est résoluble algébriquement. La simplification indiquée au n° 190, dans la recherche de $\lambda\left(\frac{z}{n}, k\right)$ en fonction de $\lambda(z, k)$, consiste à multiplier d'abord l'une des périodes par n, puis l'autre.

CHAPITRE V.

TRANSFORMATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

---

206. Le problème que l'on se propose de résoudre est le suivant :

Trouver toutes les fonctions rationnelles y de la variable x qui satisfont à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{g_1\sqrt{(1-y^2)(1-k_1^2y^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

La constante k est donnée ; il faut déterminer les constantes g_1 et k_1 en même temps que la fonction y. Pour un couple de valeurs attribuées arbitrairement aux deux constantes g_1, k_1, l'équation différentielle n'a pas, en général, de solution de l'espèce considérée, c'est-à-dire dans laquelle y s'exprime rationnellement en x.

Soit y_0 la valeur de y qui correspond à $x = 0$; concevons que l'on exprime les deux variables y et x en fonction d'une variable auxiliaire z, en posant

$$(1)\qquad \frac{dy}{g_1\sqrt{(1-y^2)(1-k_1^2y^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = dz;$$

d'où

$$z = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_{y_0}^y \frac{dy}{g_1\sqrt{(1-y^2)(1-k_1^2y^2)}}.$$

Désignons par α l'une des valeurs de l'intégrale

$$\int_0^{y_0} \frac{dy}{g_1(\sqrt{1-y^2)(1-k_1^2y^2)}},$$

on aura aussi

$$z + \alpha = \int_0^y \frac{dy}{g_1\sqrt{(1-y^2)(1-k_1^2y^2)}},$$

et par suite

$$(2)\qquad x = \lambda(z, k), \quad y = \lambda(g_1(z+\alpha), k_1).$$

Il est d'ailleurs évident que deux fonctions elliptiques x et y, définies par les équations (2), satisfont à l'équation (1) quelles que soient les constantes g_1 et k_1. La question revient donc à la suivante : Déterminer toutes les fonctions

$$y = \lambda(g_1(z+\alpha), k_1),$$

qui s'expriment rationnellement par une fonction elliptique donnée

$$x = \lambda(z, k).$$

207. Supposons que les valeurs des constantes g_1, k_1, α soient telles que l'on ait

$$(3) \qquad y = \frac{P}{Q},$$

P et Q étant des fonctions entières de x. Désignons par ω et ω' un couple de périodes elliptiques de la fonction x, par ω_1, ω'_1 un couple de périodes elliptiques de la fonction y. Quand z augmente de ω, x ne change pas, y ne doit pas changer non plus, ce qui exige que ω soit égal à une somme de multiples de ω_1 et ω'_1 ; le même raisonnement s'applique à ω'. Ainsi, il faut d'abord que l'on ait

$$(4) \qquad \begin{cases} \omega = p\,\omega_1 + q\,\omega'_1, \\ \omega' = p'\,\omega_1 + q'\,\omega'_1; \end{cases}$$

ou

$$(5) \qquad \begin{cases} \omega_1 = \dfrac{q'\,\omega - q\,\omega'}{\pm N}, \\ \omega'_1 = \dfrac{-p'\,\omega + p\,\omega'}{\pm N}, \end{cases}$$

en désignant pour abréger par N le nombre entier

$$\pm(pq' - qp').$$

Lorsque les conditions (4) sont satisfaites, la fonction y s'exprime rationnellement au moyen de x et de sa dérivée, puisqu'elle admet les périodes ω et ω'. Il faut trouver la condition pour que la dérivée n'entre pas dans cette expression.

Le second membre de l'équation (3) ne change pas, lors-

qu'on remplace z par $\frac{\omega}{2} - z$, il faut donc que l'on ait

$$\lambda(g_1(z+\alpha), k_1) = \lambda\left(g_1\left(\frac{\omega}{2} - z + \alpha\right), k_1\right)$$
$$= \lambda\left(g_1\left(\frac{\omega}{2} + 2\alpha - z - \alpha\right), k_1\right),$$

et, par conséquent,

$$(6) \qquad \frac{\omega}{2} + 2\alpha = \frac{\omega_1}{2} + p''\omega_1 + q''\omega'_1,$$

ou, en tenant compte des relations (4),

$$(7) \qquad \alpha = \frac{(2p'' + 1 - p)\omega_1 + (2q'' - q)\omega'_1}{4}.$$

La condition (6) est suffisante (n° 80); elle exprime qu'à une même valeur de y correspondent, dans chaque parallélogramme élémentaire, deux valeurs de z ayant une somme équivalente à $\frac{\omega}{2}$.

Degré de la transformation.

208. Commençons par évaluer le degré de la fonction y par rapport à x.

Considérons d'abord le cas où p et q sont premiers entre eux; prenons deux nombres r et s assujettis à la condition

$$ps - qr = \pm 1.$$

La comparaison des relations

$$pq' - qp' = \pm N, \quad ps - qr = \pm 1$$

donne

$$p' = Nr + pt,$$
$$q' = Ns + qt,$$

t étant un nombre entier.

Le parallélogramme défini par les formules

$$\omega = p\omega_1 + q\omega'_1,$$
$$\omega'' = r\omega_1 + s\omega'_1,$$

est un parallélogramme élémentaire de la fonction y aux périodes elliptiques ω_1, ω'_1; mais ces deux périodes nouvelles ω,

ω'' ne constituent pas en général un système de périodes elliptiques de la fonction y. Puisque

$$\omega' = N\omega'' + t\omega, \quad \omega' - t\omega = N\omega'',$$

la fonction x aux périodes elliptiques ω, ω' admet aussi les périodes elliptiques

$$\omega, \quad -t\omega + \omega' = N\omega''.$$

Les deux parallélogrammes élémentaires (ω, ω'') et $(\omega, N\omega'')$ ont un côté commun ω, le second côté du deuxième est égal à N fois le second côté du premier. A une même valeur de y correspondent deux valeurs de z dans chaque parallélogramme élémentaire et, par suite, $2N$ dans le grand parallélogramme. D'après la relation (6), à laquelle doit satisfaire la constante α, la somme des deux valeurs de z étant équivalente à $\frac{\omega}{2}$, les points qui les représentent sont placés comme l'indique la figure, de telle sorte que les droites Oa, $c_1 b_1$ soient égales et parallèles. Chacun des couples (a, b_n), (a_1, b_{n-1}), ..., (a_{n-1}, b_1) donne une somme égale à $N\omega'' + \frac{\omega}{2}$; il en résulte qu'à une valeur de y correspondent seulement N valeurs de x, c'est-à-dire que y est un fraction rationnelle en x du degré N.

Fig. 32.

209. Si p et q ne sont pas premiers entre eux, soit d leur plus grand commun diviseur, p_1 et q_1 les quotients de p et q par d. On cherche, comme dans le cas précédent, deux entiers r et s par la condition $p_1 s - q_1 r = \pm 1$, et l'on pose

$$\pm(p_1 q' - p' q_1) = N_1 = \frac{N}{d},$$

d'où

$$p' = N_1 r + p_1 t, \quad q' = N_1 s + q_1 t$$

La fonction y admet le parallélogramme élémentaire

$$\frac{\omega}{d} = p_1\omega_1 + q_1\omega'_1, \quad \omega'' = r\omega_1 + s\omega'_1,$$

et la fonction x les périodes elliptiques

$$\omega, \quad \omega' = N_1\omega'' + t\frac{\omega}{d}.$$

A une même valeur de y correspondent dans chaque parallélogramme élémentaire deux valeurs de z ayant une somme équivalente à $\frac{\omega}{2}$. Si d est impair, cette somme est équivalente à $\frac{\omega}{2d}$, puisque $\frac{\omega}{2} = \frac{\omega}{2d} + \frac{d-1}{2}\frac{\omega}{2d}$. Dans ce cas nous appellerons u la fonction aux périodes elliptiques $\frac{\omega}{d}$, $N_1\omega''$. Le parallélogramme relatif à la fonction u contient $2N_1$ valeurs de z que l'on pourra grouper deux à deux, comme précédemment, de manière que chaque couple présente une somme égale à $\frac{\omega}{2d} + N_1\omega''$; d'où l'on conclut que y est une fonction rationnelle en u du degré N_1. Mais la fonction u peut être considérée comme ayant les périodes elliptiques $\frac{\omega}{d}$ et $N_1\omega'' + t\frac{\omega}{d}$, c'est-à-dire $\frac{\omega}{d}$ et ω'; on l'obtiendra en divisant par d la première période de la fonction x; c'est donc une fonction rationnelle en x du degré d. Il en résulte que y est une fonction rationnelle en x du degré $N_1 d$ ou N.

Si d est pair, la somme $\frac{\omega}{2}$ équivaut à zéro, puisque $\frac{\omega}{2} = \frac{d}{2}\frac{\omega}{d}$; y est donc une fonction paire en x. Appelons u une fonction paire admettant les périodes $\frac{\omega}{d}$, $N_1\omega''$. Dans le parallélogramme relatif à u, à une même valeur de y correspondent $2N_1$ valeurs de z que l'on groupe deux à deux de manière que chaque couple ait une somme égale à $\frac{\omega}{d} + N_1\omega''$; on en conclut que y est une fonction rationnelle en u du degré N_1. Mais

la fonction u peut être considérée comme ayant le parallélogramme élémentaire $\left(\frac{\omega}{d}, \omega'\right)$: dans chacun d'eux, à une même valeur de u correspondent deux valeurs de z dont la somme est nulle ; dans le parallélogramme $\left(\frac{\omega}{2}, \omega'\right)$ relatif à x^2, se trouvent d valeurs de z ayant deux à deux une somme égale à $\frac{\omega}{2} + \omega'$, donc u est une fonction rationnelle en x du degré $\frac{d}{2}$ et, par suite, y est une fonction paire en x du degré N. Ainsi, dans tous les cas, *le degré de la fonction y par rapport à x est égal au déterminant* $\mathrm{N} = \pm (pq' - qp')$.

Transformation du premier degré.

Nous allons chercher d'abord toutes les transformations du premier degré ; on les obtient en supposant le déterminant N égal à ± 1. Il y a plusieurs cas à considérer.

210. Premier cas : *p impair, q pair.* — D'après la formule (7), on peut donner à α l'une des quatre valeurs $0, \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega'_1}{2}, \frac{\omega_1 + \omega'_1}{2}$. Si l'on appelle y_1 la fonction qui correspond à $\alpha = 0$, les diverses valeurs de y seront $\pm y_1, \pm \frac{1}{k_1 y_1}$; calculons la fonction $y_1 = \lambda(g_1 z, k_1)$. Les fonctions y_1 et x ont les mêmes zéros et les mêmes infinis ; donc le rapport $\frac{y_1}{x}$ est une constante A. Pour avoir la valeur de la constante A, dans la relation $y_1 = \mathrm{A}x$, faisons

$$z = \frac{\omega_1}{4} = \frac{q'\omega - q\omega'}{4},$$

c'est-à-dire

$$z = \frac{\omega}{4} \quad \text{ou} \quad z = \frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2},$$

il en résulte

$$\mathrm{A} = 1, \quad \text{ou} \quad \mathrm{A} = k.$$

On obtient le module k_1 en faisant

$$z = \frac{\omega_1}{4} + \frac{\omega'_1}{2};$$

on trouve, lorsque $A = 1$, $k_1 = k$, et lorsque $A = k$, $k_1 = \frac{1}{k}$. On a ensuite soit $g_1 = 1$, soit $g_1 = k$. Les solutions de ce premier cas sont donc

(8) $$k_1 = k, \quad g_1 = 1, \quad y = \pm x, \quad y = \pm \frac{1}{kx},$$

et

(9) $$k_1 = \frac{1}{k}, \quad g_1 = k, \quad y = \pm kx, \quad y = \pm \frac{1}{x}.$$

211. Second cas : *p pair, q impair*. — La valeur de α est de l'une des formes $\pm \frac{\omega_1}{4} \pm \frac{\omega'_1}{4}$; appelons y_1 la fonction qui correspond à $\alpha = \frac{\omega_1}{4} + \frac{\omega'_1}{4}$; les diverses valeurs de y seront, comme tout à l'heure, $\pm y_1$, $\pm \frac{1}{k_1 y_1}$.

Soit

$$y = \lambda\left(g_1\left(z + \frac{\omega_1 + \omega'_1}{4}\right), k_1\right) = \frac{m + nx}{1 + n'x}.$$

En faisant $z = 0$, on a

$$m = \lambda\left(g_1\left(\frac{\omega_1 + \omega'_1}{4}\right), k_1\right) = \frac{1}{\sqrt{k_1}}.$$

Si l'on remplace z par $\frac{\omega}{2} + z = \frac{\omega'_1}{2} + z$, x se change en $-x$ x et y en $\frac{1}{k_1 y}$; il en résulte

$$y = \frac{\frac{1}{k_1 m} - \frac{n'}{k_1 m} x}{1 - \frac{n}{m} x},$$

et, par suite,

$$\frac{1}{k_1 m} = m, \quad \frac{n'}{k_1 m} = -n, \quad \frac{n}{m} = -n'.$$

Ces trois relations se réduisent à deux, et la première donne pour m la valeur déjà obtenue. Le premier membre s'annule pour

$$z = -\frac{\omega_1 + \omega'_1}{4} = -\frac{(q'-p')\omega + (p-q)\omega'}{4};$$

mais on a

$$\frac{\omega_1 + \omega'_1}{4} = \pm\frac{\omega}{4} \pm \frac{\omega'}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{\omega_1 + \omega'_1}{4} = \pm\frac{\omega'}{4},$$

suivant que q' est pair ou impair; dans le premier cas $\frac{m}{n} = \frac{1}{\sqrt{k}}$ et dans le second $\frac{m}{n} = \frac{i}{\sqrt{k}}$. Supposons d'abord q' pair, on aura

$$n = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k_1}}, \quad n' = -\sqrt{k},$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{k_1}} \frac{1 + x\sqrt{k}}{1 - x\sqrt{k}}.$$

Pour obtenir le module k_1, nous ferons

$$z = \frac{\omega'_1}{4} = \pm\left(\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}\right),$$

d'où

$$\frac{1}{k_1} = \frac{1}{\sqrt{k_1}} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{k}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{k}}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\sqrt{k_1}} = -\frac{1 + \sqrt{k}}{1 - \sqrt{k}}.$$

Prenant les dérivées et faisant $z = 0$, on a

$$\frac{ig_1(1-k_1)}{\sqrt{k_1}} = n - mn' = 2\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k_1}},$$

d'où

$$g_1 = \frac{i}{2}(1 + \sqrt{k})^2.$$

Les résultats correspondant au cas où q' est impair se déduisent des précédents par le changement de k en $-k$. Ainsi les formules pour le second cas sont

$$\frac{1}{k_1} = \left(\frac{1 + \sqrt{k}}{1 - \sqrt{k}}\right)^2, \qquad g_1 = \frac{i}{2}(1 + \sqrt{k})^2,$$

$$(10) \quad y = \pm \frac{1 + \sqrt{k}}{1 - \sqrt{k}} \frac{1 + x\sqrt{k}}{1 - x\sqrt{k}}, \quad y = \pm \frac{1 - \sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}} \frac{1 - x\sqrt{k}}{1 + x\sqrt{k}}$$

et

$$\frac{1}{k_1} = \left(\frac{1 + i\sqrt{k}}{1 - i\sqrt{k}}\right)^2, \qquad g_1 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{k}),$$

$$(11) \quad y = \pm \frac{1 + i\sqrt{k}}{1 - i\sqrt{k}} \frac{1 + ix\sqrt{k}}{1 - ix\sqrt{k}}, \qquad y = \pm \frac{1 - i\sqrt{k}}{1 + i\sqrt{k}} \frac{1 - ix\sqrt{k}}{1 + ix\sqrt{k}}.$$

Le cas où p et q sont impairs donne les mêmes formules que le précédent.

A cause des deux valeurs du radical $\sqrt{k}$, on voit que le nombre total des valeurs de k_1^2 est 6, et qu'à chaque valeur de k_1^2 correspondent deux valeurs distinctes de y^2.

Transformations du second degré.

212. On trouverait avec la même facilité les transformations du second degré; mais nous verrons par la suite qu'on les obtient en combinant deux transformations particulières du second ordre avec celles du premier. C'est pourquoi nous nous bornerons à considérer le cas particulier suivant qui nous sera utile.

Soit

$$\omega = 2\omega_1 + 2\omega'_1, \quad \omega' = \omega_1, \quad \alpha = \frac{\omega_1}{4},$$

$$y = \lambda\left(g_1\left(z + \frac{\omega_1}{4}\right), k_1\right).$$

La fonction y est une fonction paire du second degré; posons

$$y=\frac{m+nx^2}{1+n'x^2}.$$

En faisant $z=0$, on obtient $m=1$. Changeons z en $\frac{\omega'}{2}+z=\frac{\omega_1}{2}+z$, la formule devient

$$-y=\frac{1+\frac{n}{k^2x^2}}{1+\frac{n'}{k^2x^2}}.$$

Identifiant avec la valeur précédente, il vient

$$n=\pm k,\quad n'=\mp k,$$

(12) $$y=\frac{1\pm kx^2}{1\mp kx^2}.$$

Pour $z=\frac{\omega'_1}{2}=\frac{\omega}{4}-\frac{\omega'}{2}$ on a

$$\frac{1}{k_1}=\frac{k\pm 1}{k\mp 1},\qquad k_1=\frac{k\mp 1}{k\pm 1}.$$

Enfin, en égalant les coefficients des puissances de z^2, on obtient

$$(1-k_1^2)g_1^2=\mp 4k,\qquad g_1=i(k\pm 1).$$

Transformation d'un degré quelconque quand y s'annule avec x.

213. Nous allons indiquer maintenant comment on détermine en général la fonction y. Nous examinerons d'abord le cas où la fonction y s'annule avec x.

Dans ce cas, α est nulle ou de la forme $m\frac{\omega_1}{2}+n\omega'_1$; l'équation (7) montre que p est impair, q pair, et l'on a

$$y=\pm\lambda(g_1z,k_1);$$

nous calculerons $\lambda(g_1z,k_1)$.

Supposons d'abord p et q premiers entre eux; si l'on compare la fonction y à la fonction qui admet les périodes ellip-

tiques (n° 208),

$$\omega = p\,\omega_1 + q\,\omega'_1,$$
$$\omega'' = r\,\omega_1 + s\,\omega'_1,$$

on voit que ces deux fonctions, ayant les mêmes zéros et les mêmes infinis, sont dans leur rapport constant; la première est égale à la seconde multipliée par l'une des constantes $\pm 1, \pm \frac{1}{k}$. Mais la fonction aux périodes elliptiques ω, ω'' s'obtient en divisant par N la seconde période de la fonction $x = \lambda(z, k)$. Si N est impair, on pourra diviser par N la première période au lieu de la seconde. Si $N = 2^n N'$, on pourra diviser la première période par N', puis la seconde n fois de suite par 2.

Si p et q ne sont pas premiers entre eux, leur plus grand commun diviseur d est impair; on divisera d'abord par d la première période ω, puis on opérera comme précédemment (n° 209).

La valeur de y, pour $z = \frac{\omega'}{2}$, est nulle ou infinie suivant que q' est pair ou impair; donc le degré du polynôme Q sera supérieur ou inférieur à celui du polynôme P, suivant que les nombres q' et N seront pairs ou impairs. Il faut remarquer en outre que la valeur de y est égale au produit de x par une fonction rationnelle de x^2.

Transformation d'un degré quelconque quand y ne s'annule pas avec x.

Ce cas se subdivise en quatre, suivant que p et q sont pairs ou impairs.

214. Premier cas : *p impair, q pair.* — La relation (7) donne $\alpha = \frac{\omega'_1}{2}$ ou $\alpha = \frac{\omega_1 + \omega'_1}{2}$; car il faut rejeter les hypothèses $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\omega_1}{2}$ qui donneraient $y = 0$ pour $x = 0$. La fonction y est égale à $\pm \frac{1}{\lambda(g_1 z, k_1)}$, c'est une fraction du premier degré de l'une des fonctions qui s'annulent avec x.

215. Second cas : *p pair, q impair.* — Considérons une fonction auxiliaire y_1 s'annulant avec x et admettant les périodes elliptiques ω_2, ω'_2 déterminées par les formules

$$\omega_1 = a\omega_2 + b\omega'_2,$$
$$\omega'_1 = a'\omega_2 + b'\omega'_2,$$

dans lesquelles les nombres entiers a, b, a', b', vérifient la relation $ab' - ba' = \pm 1$. On aura

$$\omega = (ap + a'q)\omega_2 + (bp + b'q)\omega'_2,$$
$$\omega' = (ap' + a'q')\omega_2 + (bp' + b'q')\omega'_2,$$
$$(ap + a'q)(bp' + b'q') - (bq + b'q)(ap' + a'q')$$
$$= (pq' - qp')(ab' - ba') = \mathrm{N}.$$

Si l'on prend, ce qui est permis, $a = b = a' = 1$ et $b' = 2$, la fonction y_1 est une fonction rationnelle en x du degré N; on voit que la somme $\frac{\omega}{2}$ des deux valeurs de z qui dans chaque parallélogramme correspondent à une même valeur de y est équivalente à $\frac{\omega_1}{2}$, et par suite que y est une fonction rationnelle du premier degré en y_1. Ainsi y est une fraction du premier degré de l'une des fonctions qui s'évanouissent avec x.

216. Troisième cas : *p et q impairs.* — On traite ce cas comme le précédent et on arrive à la même conclusion. On prendra

$$a = b = b' = 1 \quad \text{et} \quad a' = 2.$$

217. Quatrième cas : *p et q pairs.*—Comme nous l'avons vu au n° 209, la fonction y s'exprime par une fraction qui ne contient que des puissances paires de x.

Soit $p = 2p_1$, $q = 2q_1$; posons

$$\omega = 2\omega_2 + 2\omega'_2, \quad \omega' = \omega_2.$$

Désignons par k_2 le module de la fonction aux périodes elliptiques ω_2, ω'_2 et par g_2 son paramètre, la fonction

$$x_1 = \lambda\left(g_2\left(z + \frac{\omega_2}{4}\right), k_2\right)$$

sera donnée par la formule du n° (212)

$$x_1 = \frac{1 + kx^2}{1 - kx^2}.$$

On a ensuite

$$\omega_2 = p'\omega_1 + q'\omega'_1,$$
$$\omega'_2 = (p_1 - p')\omega_1 + (q_1 - q')\omega'_1.$$

Le déterminant

$$p'(q_1 - q') - q'(p_1 - p')$$

est égal à $\frac{N}{2}$. Posons maintenant

$$z + \frac{\omega_2}{4} = z', \quad \text{d'où} \quad x_1 = \lambda(g_2 z', k_2);$$

la somme des deux valeurs de z, qui, dans chaque parallélogramme élémentaire, correspondent à une même valeur de y, étant équivalente à 0, la somme des deux valeurs de z' est équivalente à $\frac{\omega_2}{2}$; il en résulte que y est une fraction rationnelle en x_1 du degré $\frac{N}{2}$. Si p' et q' ne sont pas tous deux pairs, cette fraction se déterminera comme nous l'avons dit; mais si p' et q' contiennent le facteur 2, on répètera une seconde fois la même réduction. Cette seconde transformation ramène le module primitif k, tandis que le paramètre acquiert la valeur 2, et la nouvelle fonction x_2 a pour valeur

$$x_2 = \frac{1}{k\lambda\left(2z + \frac{\omega}{4}, k\right)} = \frac{1}{k}\,\frac{1 - 2k^2x^2 + k^2x^4}{1 - 2x^2 + k^2x^4}.$$

218. Le résultat de deux transformations successives, l'une du degré n, l'autre du degré n', s'obtiendrait par une seule transformation de l'ordre $N = nn'$. Réciproquement, toute transformation de l'ordre $N = nn'$ peut s'obtenir par deux transformations successives, la première du degré n, la seconde du degré n'. Cette proposition est évidente lorsque la fonction y s'évanouit avec x, puisqu'alors on obtient la fonction en divisant les périodes de x par deux nombres dont le produit est N,

et que l'on peut remplacer chaque division par deux divisions successives ; il est facile de l'étendre à tous les cas.

En appliquant au cas où le déterminant est égal à 2 ce que nous avons dit dans les nos **213** et suivants, on voit que les transformations du second degré s'obtiennent en combinant, soit la formule (2) du n° **196** pour la division de la seconde période par deux, soit la formule (12) du n° **212**, avec les formules de transformation du premier degré.

219. Legendre s'était proposé le problème de la transformation comme moyen de simplifier le calcul de la valeur approchée de l'intégrale définie

$$z = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

dans laquelle le module k a une valeur positive inférieure à l'unité. On obtient rapidement la valeur approchée de z, lorsque k est voisin de zéro ou de un; il s'agissait de ramener l'intégrale à l'un des cas précédents, par un changement de variable. Dans la première transformation indiquée par Legendre, la fonction y est une fonction irrationnelle de x; elle correspond à la division par 2 de la première période de la fonction x.

CHAPITRE VI.

REMARQUES SUR LA TRANSFORMATION.

Remarques sur la division de la première période.

220. Nous avons donné, nos **198** et suivants, les formules indispensables pour la division de l'une des périodes d'une fonction elliptique par un nombre impair n. A ces formules, on en peut ajouter beaucoup d'autres utiles dans les applications.

Supposons d'abord qu'il s'agisse de la division de la pre-

mière période; on a trouvé

$$(1)\quad \lambda(g_1 z, k_1) = A\lambda(z)\lambda\left(z+\frac{\Omega}{n}\right)\lambda\left(z+2\frac{\Omega}{n}\right)\cdots\lambda\left(z+(n-1)\frac{\Omega}{n}\right),$$

$$(2)\quad \frac{1}{A} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\lambda^2\left(\frac{\omega}{4}-\frac{\Omega}{n}\right)\lambda^2\left(\frac{\omega}{4}-2\frac{\Omega}{n}\right)\cdots\lambda^2\left(\frac{\omega}{4}-\frac{n-1}{2}\frac{\Omega}{n}\right),$$

$$(3)\quad g_1 = \frac{\lambda^2\left(\frac{\Omega}{n}\right)\lambda^2\left(2\frac{\Omega}{n}\right)\cdots\lambda^2\left(\frac{n-1}{2}\frac{\Omega}{n}\right)}{\lambda^2\left(\frac{\omega}{4}-\frac{\Omega}{n}\right)\lambda^2\left(\frac{\omega}{4}-2\frac{\Omega}{n}\right)\cdots\lambda^2\left(\frac{\omega}{4}-\frac{n-1}{2}\frac{\Omega}{n}\right)},$$

$$(4)\quad k_1 = \frac{k^n}{A^2},\quad \frac{1}{A} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{\frac{k_1}{k^n}}.$$

221. Remarque I. — On démontre aisément que la fonction $\mu(g_1 z, k_1)$ et le produit

$$\mu(z)\,\mu\left(z+\frac{\Omega}{n}\right)\mu\left(z+2\frac{\Omega}{n}\right)\cdots\mu\left(z+(n-1)\frac{\Omega}{n}\right)$$

ont les mêmes périodes élémentaires $\frac{\Omega}{n}$ et $\frac{\Omega}{2n}+\Omega'$, les mêmes zéros et les mêmes infinis; donc

$$(5)\quad \mu(g_1 z, k_1) = B\mu(z)\mu\left(z+\frac{\Omega}{n}\right)\mu\left(z+2\frac{\Omega}{n}\right)\cdots\mu\left(z+(n-1)\frac{\Omega}{n}\right),$$

d'où, en faisant $z=0$,

$$(6)\quad \frac{1}{B} = \mu^2\left(\frac{\Omega}{n}\right)\mu^2\left(2\frac{\Omega}{n}\right)\cdots\mu^2\left(\frac{n-1}{2}\frac{\Omega}{n}\right).$$

On a de même

$$(7)\quad \nu(g_1 z, k_1) = C\nu(z)\nu\left(z+\frac{\Omega}{n}\right)\nu\left(z+2\frac{\Omega}{n}\right)\cdots\nu\left(z+(n-1)\frac{\Omega}{n}\right),$$

$$(8)\quad \frac{1}{C} = \nu^2\left(\frac{\Omega}{n}\right)\nu^2\left(2\frac{\Omega}{n}\right)\cdots\nu^2\left(\frac{n-1}{2}\frac{\Omega}{n}\right).$$

En faisant $z = \frac{\Omega}{4}$ dans la formule (7), il vient

$$k'_1 = C k' \nu^2 \left(\frac{\omega}{4} - \frac{\Omega}{n}\right) \nu^2 \left(\frac{\omega}{4} - 2\frac{\Omega}{n}\right) \cdots \nu^2 \left(\frac{\omega}{4} - \frac{n-1}{2}\frac{\Omega}{n}\right),$$

et, en se servant de la relation $\nu\left(\frac{\omega}{4} - z\right)\nu(z) = k'$ (n° 101),

$$(9) \qquad k'_1 = C \frac{k'^n}{\nu^2\left(\frac{\Omega}{n}\right)\nu^2\left(2\frac{\Omega}{n}\right)\cdots\nu^2\left(\frac{n-1}{2}\frac{\Omega}{n}\right)}.$$

La division membre à membre des formules (1) et (5) donne

$$(10) \qquad \varpi(g_1 z, k_1) = \frac{A}{B}\varpi(z)\varpi\left(z + \frac{\Omega}{n}\right)\cdots\varpi\left(z + (n-1)\frac{\Omega}{n}\right).$$

La comparaison des formules (8) et (9), puis des formules (2), (3), (4) conduit aux relations

$$(11) \qquad \lambda^2\left(\frac{\Omega}{n}\right)\lambda^2\left(2\frac{\Omega}{n}\right)\cdots\lambda^2\left(\frac{n-1}{2}\frac{\Omega}{n}\right) = g_1\sqrt{\frac{k_1}{k^n}},$$

$$(12) \qquad \mu^2\left(\frac{\Omega}{n}\right)\mu^2\left(2\frac{\Omega}{n}\right)\cdots\mu^2\left(\frac{n-1}{2}\frac{\Omega}{n}\right) = \sqrt{\frac{k'^n}{k'_1}}\sqrt{\frac{k_1}{k^n}},$$

$$(13) \qquad \nu^2\left(\frac{\Omega}{n}\right)\nu^2\left(2\frac{\Omega}{n}\right)\cdots\nu^2\left(\frac{n-1}{2}\frac{\Omega}{n}\right) = \sqrt{\frac{k'^n}{k'_1}},$$

$$(14) \qquad \varpi^2\left(\frac{\Omega}{n}\right)\varpi^2\left(2\frac{\Omega}{n}\right)\cdots\varpi^2\left(\frac{n-1}{2}\frac{\Omega}{n}\right) = \frac{g_1}{\sqrt{\frac{k'^n}{k'_1}}}.$$

222. Remarque II. — Au lieu d'exprimer les fonctions $\lambda(g_1 z, k_1)$, $\mu(g_1 z, k_1)$, ..., par des produits, on peut les exprimer par des sommes.

Si, dans la formule (1), on groupe le facteur $\lambda\left(z + \frac{\Omega}{n}\right)$ avec le facteur $\lambda\left(z + (n-1)\frac{\Omega}{n}\right)$ qui est égal à $\lambda\left(z - \frac{\Omega}{n}\right)$, puis les

facteurs $\lambda\left(z+2\frac{\Omega}{n}\right), \lambda\left(z+(n-2)\frac{\Omega}{n}\right), \ldots,$ on a

$$\lambda\left(z+\frac{\Omega}{n}\right)\lambda\left(z-\frac{\Omega}{n}\right)=\frac{\lambda^2(z)-\lambda^2\left(\frac{\Omega}{n}\right)}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2\left(\frac{\Omega}{n}\right)}$$

$$=(-1)\frac{1-\frac{\lambda^2(z)}{\lambda^2\left(\frac{\Omega}{n}\right)}}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2\left(\frac{\Omega}{n}\right)}\lambda^2\left(\frac{\Omega}{n}\right).$$

Il en résulte d'abord, d'après les relations (4) et (11),

$$(15)\qquad \lambda(g_1 z, k_1)=g_1\lambda(z)\prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}}\frac{1-\frac{\lambda^2(z)}{\lambda^2\left(p\frac{\Omega}{n}\right)}}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2\left(p\frac{\Omega}{n}\right)}.$$

Si, dans l'équation (15), on considère $\lambda(g_1 z, k_1)$ comme une quantité donnée et $\lambda(z)$ comme l'inconnue, les n valeurs de l'inconnue sont les valeurs des quantités

$$\lambda(z),\quad \lambda\left(z+\frac{\Omega}{n}\right),\quad \lambda\left(z+2\frac{\Omega}{n}\right),\ldots,\quad \lambda\left(z+(n-1)\frac{\Omega}{n}\right),$$

puisque le second membre ne change pas quand z augmente de $\frac{\Omega}{n}$. Or, si l'on ordonne l'équation par rapport aux puissances de $\lambda(z)$, on voit que la somme des racines est égale à

$$\frac{k^{n-1}}{g_1}\lambda^4\left(\frac{\Omega}{n}\right)\lambda^4\left(2\frac{\Omega}{n}\right)\cdots\lambda^4\left(\frac{n-1}{2}\frac{\Omega}{n}\right)\lambda(g_1 z, k_1),$$

ou à

$$\frac{k_1 g_1}{k}\lambda(g_1 z, k_1).$$

Ainsi

$$(16)\quad \begin{cases} \lambda(g_1 z, k_1) = \dfrac{k}{k_1 g_1} \displaystyle\sum_{p=0}^{p=n-1} \lambda\left(z + p\,\dfrac{\Omega}{n}\right) \\[2ex] \qquad = \dfrac{k}{k_1 g_1}\,\lambda(z)\left[1 + 2 \displaystyle\sum_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \dfrac{\lambda'\left(p\,\frac{\Omega}{n}\right)}{1 - k^2\lambda^2(z)\,\lambda^2\left(p\,\frac{\Omega}{n}\right)}\right] \end{cases}$$

On a de même

$$(17)\quad \begin{cases} \mu(g_1 z, k_1) = \dfrac{k}{k_1 g_1} \displaystyle\sum_{p=0}^{p=n-1} \mu\left(z + p\,\dfrac{\Omega}{n}\right) \\[2ex] \qquad = \dfrac{k}{k_1 g_1}\,\mu(z)\left[1 + 2 \displaystyle\sum_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \dfrac{\mu\left(p\,\frac{\Omega}{n}\right)}{1 - k^2\lambda^2(z)\,\lambda^2\left(p\,\frac{\Omega}{n}\right)}\right], \end{cases}$$

$$(18)\quad \begin{cases} \nu(g_1 z, k_1) = \dfrac{1}{g_1} \displaystyle\sum_{p=0}^{p=n-1} \nu\left(z + p\,\dfrac{\Omega}{n}\right) \\[2ex] \qquad = \dfrac{1}{g_1}\,\nu(z)\left[1 + 2 \displaystyle\sum_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \dfrac{\nu\left(p\,\frac{\Omega}{n}\right)}{1 - k^2\lambda^2(z)\,\lambda^2\left(p\,\frac{\Omega}{n}\right)}\right], \end{cases}$$

$$(19)\quad \begin{cases} \varpi(g_1 z, k_1) = \dfrac{k'}{k'_1 g_1} \displaystyle\sum_{p=0}^{p=n-1} \varpi\left(z + p\,\dfrac{\Omega}{n}\right) \\[2ex] \qquad = \dfrac{k'}{k'_1 g_1}\,\varpi(z)\left[1 + 2\mu^2(z) \displaystyle\sum_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \dfrac{\nu\left(p\,\frac{\Omega}{n}\right)}{\mu^2\left(p\,\frac{\Omega}{n}\right) - \lambda^2(z)\,\nu^2\left(p\,\frac{\Omega}{n}\right)}\right] \end{cases}$$

223. Remarque III. — On exprime aisément par des formules analogues à celles des numéros **221** et **222** la fonc-

tion $1-\lambda(g_1 z, k_1)$, qui, dans chaque parallélogramme élémentaire, admet le zéro double $\frac{\Omega}{4n}$. On sait (nº 198) que l'une des quantités $\frac{\Omega}{4n}+p\frac{\Omega}{n}$ est égale à $\frac{\Omega}{4}$ ou à $\frac{3\Omega}{4}$, suivant que n est de la forme $4n'+1$ ou de la forme $4n'-1$. On aura donc, dans le premier cas,

$$(20) \qquad 1-\lambda(g_1 z, k_1) = B \prod_{p=0}^{p=n-1} \left[1-\lambda\left(z+p\frac{\Omega}{n}\right)\right],$$

dans le second cas,

$$(21) \qquad 1-\lambda(g_1 z, k_1) = B \prod_{p=0}^{p=n-1} \left[1+\lambda\left(z+p\frac{\Omega}{n}\right)\right].$$

La constante est la même; on la détermine en faisant $z=0$, ce qui donne

$$\frac{1}{B} = \mu^2\left(\frac{\Omega}{n}\right)\mu^2\left(2\frac{\Omega}{n}\right)\cdots\quad \mu^2\left(\frac{n-1}{2}\,\frac{\Omega}{n}\right).$$

La fonction $1-k_1\lambda(g_1 z, k_1)$ admet, dans chaque parallélogramme élémentaire, le zéro double $\frac{\Omega}{4n}+\frac{\Omega'}{2}$. L'une des quantités $\frac{\Omega}{4n}+\frac{\Omega'}{2}+p\frac{\Omega}{n}$ étant égale à $\frac{\Omega}{4}+\frac{\Omega'}{2}$ ou à $\frac{3\Omega}{4}+\frac{\Omega'}{2}$, suivant que n est de la forme $4n'+1$ ou de la forme $4n'-1$, on aura, dans le premier cas,

$$(22) \qquad 1-k_1(g_1 z, k_1) = C \prod_{p=0}^{p=n-1} \left[1-k\lambda\left(z+p\frac{\Omega}{n}\right)\right],$$

dans le second cas,

$$(23) \qquad 1-k_1\lambda(g_1 z, k_1) = C \prod_{p=0}^{p=n-1} \left[1+k\lambda\left(z+p\frac{\Omega}{n}\right)\right].$$

En faisant $z=0$, on trouve

$$\frac{1}{C}=\nu^2\left(\frac{\Omega}{n}\right)\nu^2\left(2\frac{\Omega}{n}\right)\cdots\nu^2\left(\frac{n-1}{2}\frac{\Omega}{n}\right).$$

On peut transformer ces formules, si l'on met à part le premier facteur, et si l'on groupe les autres deux à deux, en remarquant que

$$\left[1-\lambda\left(z+p\frac{\Omega}{n}\right)\right]\left[1-\lambda\left(z-p\frac{\Omega}{n}\right)\right]=\frac{\left[\mu\left(p\frac{\Omega}{n}\right)-\nu\left(p\frac{\Omega}{n}\right)\lambda(z)\right]^2}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2\left(p\frac{\Omega}{n}\right)},$$

et que

$$\left[1-k\lambda\left(z+p\frac{\Omega}{n}\right)\right]\left[1-k\lambda\left(z-p\frac{\Omega}{n}\right)\right]=\frac{\left[\nu\left(p\frac{\Omega}{n}\right)-\mu\left(p\frac{\Omega}{n}\right)\lambda(z)\right]^2}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2\left(p\frac{\Omega}{n}\right)},$$

on obtient les quatre formules suivantes

$$(24)\qquad 1-\lambda(g_1 z,k_1)=[1-\lambda(z)]\prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}}\frac{\left[1-\dfrac{\lambda(z)}{\lambda\left(\frac{\omega}{4}-p\frac{\Omega}{n}\right)}\right]^2}{1-k^2\lambda^2\left(p\frac{\Omega}{n}\right)\lambda^2(z)},$$

$$(25)\qquad 1-\lambda(g_1 z,k_1)=[1+\lambda(z)]\prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}}\frac{\left[1+\dfrac{\lambda(z)}{\lambda\left(\frac{\omega}{4}-p\frac{\Omega}{n}\right)}\right]}{1-k^2\lambda^2\left(p\frac{\Omega}{n}\right)\lambda^2(z)},$$

$$(26)\qquad 1-k_1\lambda(g_1 z,k_1)=[1-k\lambda(z)]\prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}}\frac{\left[1-k\lambda\left(\frac{\omega}{4}-p\frac{\Omega}{n}\right)\lambda(z)\right]}{1-k^2\lambda^2\left(p\frac{\Omega}{n}\right)\lambda^2(z)}$$

$$(27)\qquad 1-k_1\lambda(g_1 z,k_1)=[1+k\lambda(z)]\prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}}\frac{\left[1+k\lambda\left(\frac{\omega}{4}-p\frac{\Omega}{n}\right)\lambda(z)\right]^2}{1-k^2\lambda^2\left(p\frac{\Omega}{n}\right)\lambda^2(z)}$$

La première et la troisième s'appliquent lorsque n est de la forme $4n'+1$; les deux autres quand n est de la forme $4n'-1$. En remplaçant z par $-z$, on obtient les fonctions

$$1+\lambda(g_1 z, k_1), \quad 1+k_1\lambda(g_1 z, k_1);$$

on en déduit les valeurs de $\mu(g_1 z, k_1)$ et de $\nu(g_1 z, k_1)$ obtenues d'une autre manière.

Remarques sur la division de la seconde période.

224. Les formules pour la division de la seconde période sont semblables aux précédentes; on les obtient en remplaçant dans celles-ci, dont nous désignerons l'ensemble par (s), Ω par Ω', et, en outre, dans la formule (2) A par $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ A, et dans la formule (3) g_1 par $(-1)^{\frac{n-1}{2}} g_1$; soit (s') l'ensemble des nouvelles formules. L'omission de ces deux derniers changements donnerait la fonction inconnue changée de signe lorsque n est de la forme $4n'-1$. En remplaçant dans les formules (s) Ω par $\pm n\Omega+(1\mp n)\Omega'$, ce qui est permis, les signes supérieurs correspondant au cas où n est de la forme $4n'+1$ et les signes inférieurs au cas où n est de la forme $4n'-1$, on obtient, au signe près des deux constantes A et g_1, les formules relatives à la division de la seconde période. Ainsi, abstraction faite du signe, la division de la seconde période par n donne les mêmes fonctions que la division de la première période par le même nombre, ce qui s'accorde avec la remarque du n° 200.

225. Dans les formules (s), Ω désigne la première période de l'un des couples de périodes elliptiques de la fonction $\lambda(z, k)$; c'est-à-dire que l'on a

$$\Omega=(4a+1)\omega+4b\omega',$$

$4a+1$ et $4b$ étant premiers entre eux. Mais ces formules ne changent pas lorsqu'on augmente Ω d'un multiple de $n\omega$ ou de $n\omega'$; or on peut prendre t et t' ainsi que a et b, de manière

que l'on ait

$$(4a+1)\omega+4b\omega'+nt\omega+nt'\omega'$$
$$=(4a+1+tx)\omega+(4b+nt')\omega'=p\omega+q\omega',$$

p et q étant des nombres quelconques n'ayant pas un même facteur commun avec n. Dans ce qui suit nous supposerons que Ω désigne la quantité $p\omega+q\omega'$, et qu'en outre q est pair.

Transformations complémentaires.

226. On sait que la fonction au module k', complément de k, a pour périodes (n° 107)

$$\omega_1=-2i\omega',\quad \omega'_1=\frac{i\omega}{2}.$$

On en déduit

$$\Omega=p\omega+q\omega'=\left(\frac{q}{2}\omega_1-2p\omega'_1\right)i=\Omega_1 i,$$

en désignant par Ω_1 une période analogue à Ω servant pour la transformation de la fonction au module complémentaire.

Si dans les formules (s) on change z en iz, Ω en $i\Omega_1$, et que l'on remplace les fonctions

$$\lambda(g_1 iz, k_1),\quad \mu(g_1 iz, k_1),\quad \nu(g_1 iz, k_1),\quad \varpi(g_1 iz, k_1)$$

par leurs valeurs à l'aide des fonctions

$$\lambda(g_1 z, k'_1),\quad \mu(g_1 z, k'_1),\quad \nu(g_1 z, k'_1),\quad \varpi(g_1 z, k'_1),$$

dans lesquelles le paramètre g_1 n'a pas changé, tandis que le module k_1 est remplacé par son complément (n° 106) ; si en même temps on exprime les fonctions

$$\lambda\left(i\left(z+p\frac{\Omega_1}{n}\right)\right),\quad \mu\left(i\left(z+p\frac{\Omega_1}{n}\right)\right),\ldots,$$

à l'aide des fonctions

$$\lambda\left(z+p\frac{\Omega_1}{n}, k'\right),\quad \mu\left(z+p\frac{\Omega_1}{n}, k'\right),\ldots,$$

et les constantes

$$\lambda\left(p\frac{\Omega_1}{n}i\right),\quad \mu\left(p\frac{\Omega_1}{n}i\right),\ldots$$

à l'aide des nouvelles constantes

$$\lambda\left(p\frac{\Omega_1}{n}, k'\right),\quad \mu\left(p\frac{\Omega_1}{n}, k'\right),\ldots$$

on déduira ainsi des formules qui servent à passer du module k au module k_1 celles qui servent à passer du module k' complément de k au module k'_1 complément de k_1.

Les formules déduites de la série (s) seront les analogues de celles de la série (s'), et réciproquement.

Transformations supplémentaires.

227. Si, après avoir divisé par n la première période Ω de la fonction $\lambda(z, k)$, on divise également par n la deuxième période Ω' de la seconde fonction, on revient, ainsi que nous l'avons observé, au module primitif et le résultat est $\lambda(nz, k)$. Ce sont ces deux transformations successives que Jacobi appelle transformations supplémentaires ; leur ensemble équivaut à la multiplication de l'argument z. On a donc

$$\lambda(nz, k) = \frac{n}{g_1}\lambda(g_1 z, k_1)\prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}}\frac{1-\dfrac{\lambda^2(g_1 z, k_1)}{\lambda^2\left(pg_1\dfrac{\Omega'}{n}, k_1\right)}}{1-k_1^2\lambda^2(g_1 z, k_1)\lambda^2\left(pg_1\dfrac{\Omega'}{n}, k_1\right)}.$$

Mais on sait que

$$k_1^2\lambda^2(g_1 a, k_1) = \frac{1}{\lambda^2\left(g_1\left(\dfrac{\Omega'}{2}-a\right), k_1\right)};$$

par conséquent le diviseur du dernier facteur a pour valeur

$$1-\frac{\lambda^2(g_1 z, k_1)}{\lambda^2\left(g_1\left(\dfrac{\Omega'}{2}-\dfrac{n-1}{2}\dfrac{\Omega'}{n}\right), k_1\right)} = 1-\frac{\lambda^2(g_1 z, k_1)}{\lambda^2\left(g_1\dfrac{\Omega'}{2n}, k_1\right)};$$

on verrait de même que le précédent est

$$1-\frac{\lambda^2(g_1 z, k_1)}{\lambda^2\left(g_1 3\frac{\Omega'}{2n}, k_1\right)},$$

et ainsi de suite. Si l'on change l'ordre des diviseurs, la valeur de $\lambda\,(nz, k)$ prendra la forme suivante

$$(28)\quad \lambda(nz, k) = \frac{n}{g_1}\,\lambda(g_1 z, k_1)\prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \frac{1-\dfrac{\lambda^2(g_1 z, k_1)}{\lambda^2\left(pg_1\dfrac{\Omega'}{n}, k_1\right)}}{1-\dfrac{\lambda^2(g_1 z, k_1)}{\lambda^2\left((2p-1)g_1\dfrac{\Omega'}{2n}, k_1\right)}}.$$

Pour fixer les idées, supposons le module k réel et moindre que l'unité, la fonction $\lambda\,(z, k)$ a pour l'un de ses couples de périodes elliptiques

$$\omega = 4\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},\quad \omega' = 2i\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k'^2u^2)}},$$

les intégrales étant rectilignes. Admettons que le paramètre g_1 et le module k_1 se rapportent à la division par n de la période ω; d'après l'équation (4), quand n devient très-grand, k_1 tend vers zéro; par conséquent la limite du produit

$$g_1\frac{\omega}{n} = 4\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k_1^2u^2)}}$$

est égale à 2π, celle de $\frac{g_1}{n}$ est égale $\frac{2\pi}{\omega}$; enfin celle de $\lambda\left(\frac{g_1}{n}\alpha, k_1\right)$, quand on suppose que α reste fixe, est $\sin\frac{2\pi}{\omega}\alpha$. Si dans la formule (24) on fait $z = \frac{\zeta}{n}$, ζ restant constant lorsque n augmente indéfiniment, il vient

$$\lambda(\zeta, k) = \frac{\omega}{2\pi}\sin\frac{2\pi\zeta}{\omega}\;\frac{1-\dfrac{\sin^2\dfrac{2\pi\zeta}{\omega}}{\sin^2 2\pi\rho}}{1-\dfrac{\sin^2\dfrac{2\pi\xi}{\omega}}{\sin^2\pi\rho}}\cdot\frac{1-\dfrac{\sin^2\dfrac{2\pi\zeta}{\omega}}{\sin^2 4\pi\rho}}{1-\dfrac{\sin^2\dfrac{2\pi\zeta}{\omega}}{\sin^2 3\pi\rho}}\cdots$$

C'est par cette démonstration, qu'il serait aisé de rendre rigoureuse, que Jacobi obtient le développement des fonctions elliptiques en produits d'un nombre infini de facteurs (*voyez* livre IV, chapitre II).

Transformation du troisième degré.

228. Afin de mieux faire comprendre la méthode, nous allons effectuer les calculs pour la transformation du troisième degré et pour celle du cinquième degré. Nous commencerons par la transformation du troisième degré.

Si l'on développe suivant les puissances de z les deux membres des équations (25) et (27), et si l'on égale les coefficients de z, on a

(29) $$-g_1 = 1 - \frac{2}{\lambda\left(\frac{\Omega}{12}\right)},$$

(30) $$-\frac{k_1}{k} g_1 = 1 - 2\lambda\left(\frac{\Omega}{12}\right).$$

En égalant les coefficients de z^2 dans les deux membres de l'équation (5), on trouve

(31) $$-\frac{g_1^2}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda^2\left(\frac{\Omega}{12}\right)} + k^2\lambda^2\left(2\frac{\Omega}{12}\right).$$

Enfin l'équation (4) devient

(32) $$\lambda^4\left(\frac{\Omega}{12}\right) = \frac{k_1}{k^3}.$$

Posons

$$k = p^4, \quad k_1 = q^4,$$

l'équation (32) donne

$$\lambda\left(\frac{\Omega}{12}\right) = \frac{q}{p^3};$$

puis l'équation (29)

$$g_1 = \frac{2p^3 - q}{q}.$$

Substituant dans l'équation (30), on obtient l'équation entre les modules

$$(33)\qquad p^4 - q^4 = 2pq(1 - p^2 q^2).$$

De l'équation (31) on déduit

$$k^2 \lambda^2\left(2\frac{\Omega}{12}\right) = p^2 q(2p^3 - q),\qquad \frac{1}{\lambda^2\left(2\frac{\Omega}{12}\right)} = \frac{p^6}{q(2p^3 - q)}.$$

La substitution dans la formule (15) donne la formule de transformation

$$(34)\qquad y = \frac{x}{q^2}\,\frac{q(2p^3 - q) - p^6 x^2}{1 - p^2 q(2p^3 - q)x^2}.$$

En éliminant $\lambda^2\left(\frac{\Omega}{12}\right)$ entre les équations (12) et (13), on obtient l'équation modulaire sous la forme

$$\sqrt{kk_1} + \sqrt{k' k'_1} = 1,$$

qui se ramène aisément à l'équation (30).

Si l'on suppose p réel, positif et moindre que l'unité, l'équation (33) a une racine réelle comprise entre o et p, une seconde racine réelle comprise entre -1 et $-p$ et deux racines imaginaires. La racine positive correspond à la division de la période ω, la seconde racine réelle à la division de la période ω'.

Transformation du cinquième degré.

229. Les équations (24), (26), (5), (7), (4) donnent de la même manière que dans le cas précédent,

$$(35)\qquad g_1 = 1 + 2\left[\frac{1}{\lambda(\alpha)} - \frac{1}{\lambda(3\alpha)}\right],$$

$$(36)\qquad g_1\frac{k_1}{k} = 1 + 2[\lambda(\alpha) - \lambda(3\alpha)],$$

$$(37)\qquad g_1^2 = 1 + 2\left[\frac{1}{\lambda^2(\alpha)} + \frac{1}{\lambda^2(3\alpha)}\right] - 2k^2[\lambda^2(2\alpha) + \lambda^2(4\alpha)],$$

$$(38)\qquad g_1^2\frac{k_1^2}{k^2} = 1 + 2[\lambda^2(\alpha) + \lambda^2(3\alpha)] - 2[\lambda^2(2\alpha) + \lambda^2(4\alpha)],$$

$$(39)\qquad \lambda^4(\alpha)\lambda^4(3\alpha) = \frac{k_1}{k^5};$$

lans lesquelles α désigne, pour abréger, la quantité $\frac{\Omega}{20}$.

Si l'on pose

$$k = p^4, \quad k_1 = q^4,$$

on déduit des équations (39), (35), (36),

$$\lambda(3\alpha) - \lambda(\alpha) = \frac{p^4 - q^4}{2p^4(1+pq^3)},$$

$$\lambda(\alpha)\lambda(3\alpha) = \frac{q}{p^5}, \qquad g_1 = \frac{q+p^5}{q(1+pq^3)},$$

$$\lambda^2(\alpha) + \lambda^2(3\alpha) = \frac{(p^4-q^4)^2 + 8p^3q(1+pq^3)^2}{4p^8(1+pq^3)^2},$$

$$\frac{1}{\lambda^2(\alpha)} + \frac{1}{\lambda^2(3\alpha)} = \frac{(p^4-q^4)^2 + 8p^3q(1+pq^3)^2}{4q^2(1+pq^3)^2}p^2.$$

Éliminant entre les équations (37) et (38) le binôme $\lambda^2(2\alpha) + \lambda^2(4\alpha)$, puis substituant à la place des quantités leurs valeurs, on obtient l'équation modulaire, qui peut prendre les diverses formes suivantes :

(40) $$p^6 - q^6 + 5p^2q^2(p^2 - q^2) - 4pq(1 - p^4q^4) = 0,$$

(41) $$\left(\frac{p+q}{p-q}\right)^4 = \frac{1+p^4}{1-p^4} \cdot \frac{1-q^4}{1+q^4},$$

(42) $$(p^2+q^2)(p^4-q^4) - 4pq(1+pq^3)(1-qp^3) = 0.$$

L'une des équations (33) ou (34) donne ensuite la valeur de $\lambda^2(2\alpha) + \lambda^2(4\alpha)$, on trouve

$$\lambda^2(2\alpha) + \lambda^2(4\alpha) = \frac{(p^2+q^2)(q+p^5)}{p^7(1+pq^3)},$$

d'ailleurs, on a

$$\lambda(3\alpha+\alpha)\lambda(3\alpha-\alpha) = \lambda(4\alpha).\lambda(2\alpha) = \frac{\lambda^2(3\alpha) - \lambda^2(\alpha)}{1 - k^2\lambda^2(3\alpha)\lambda^2(\alpha)},$$

il en résulte

$$\lambda^2(2\alpha)\lambda^2(4\alpha) = \frac{q(q+p^5)}{p^{10}(1+pq^3)},$$

d'où, enfin, la formule de transformation

$$y = g_1 x \frac{1 - \frac{x^2}{\lambda^2(2\alpha)}}{1 - k^2\lambda^2(2\alpha)x^2} \cdot \frac{1 - \frac{x^2}{\lambda^2(4\alpha)}}{1 - k^2\lambda^2(4\alpha)x^2},$$

$$(43)\quad y = \frac{x}{q^2}\,\frac{q(q+p^5) - p^3(p^2+q^2)(q+p^5)x^2 + p^{10}(1+pq^3)x^4}{1 + pq^3 - p(p^2+q^2)(q+p^5)x^2 + p^6 q(q+p^5)x^4}.$$

CHAPITRE VII.

SUITE DE LA TRANSFORMATION.

230. On peut, avec Abel, généraliser le problème de la transformation et se proposer de déterminer g_1 et k_1 de manière que l'équation

$$(1)\qquad \frac{dy}{g_1\sqrt{(1-y^2)(1-k_1^2 y^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

ait une intégrale définie par une équation algébrique

$$(2)\qquad f(x, y) = 0,$$

entre les variables x et y. Si l'on continue de désigner par z une variable auxiliaire liée aux variables x et y par la relation

$$(3)\qquad dz = \frac{dy}{g_1\Delta y} = \frac{dx}{\Delta x},$$

on aura

$$(4)\qquad x = \lambda(z, k),\qquad y = \lambda(g_1(z+\alpha), k_1).$$

Soit N le degré de l'équation (2) par rapport à y; ω, ω' les périodes de la fonction elliptique $\lambda(z, k)$; ω_1, ω'_1 celles de la fonction $\lambda(g_1 z, k_1)$. Supposons que l'on ait remplacé dans l'équation (2) x et y par leurs valeurs en fonction de z; quand z augmente d'un multiple de ω, x ne change pas; or à chaque valeur de x correspondent seulement N valeurs de y; il en résulte que y ne doit pas changer lorsque z augmente

d'un certain multiple de ω ; le même raisonnement s'applique à la période ω'. Ainsi il faut que l'on ait

$$(5) \qquad \begin{cases} m\omega = p_1\omega_1 + q_1\omega'_1, \\ m'\omega' = p'_1\omega_1 + q'_1\omega'_1, \end{cases}$$

m, p_1, q_1 étant des entiers que l'on peut supposer non divisibles par un même nombre, et de même m', p'_1, q'_1.

231. Nous allons démontrer que ces conditions sont suffisantes. Sur le plan, dans lequel sont figurées les variations de z, marquons les points $a_1, a_2, a_3, \ldots, a'_1, a'_2, a'_3, \ldots$, qui correspondent aux valeurs $\omega, 2\omega, \ldots, \omega', 2\omega', \ldots$, attribuées à z ; par les points $a'_1, a'_2, a'_3, \ldots$, menons des parallèles à oa, et par les points $a_1, a_2, a_3, \ldots$, des parallèles a oa'_1 ; opérons de même avec les périodes ω_1, ω'_1. Le plan sera ainsi partagé en deux systèmes de parallélogrammes élémentaires qui correspondent, les premiers à la fonction x, les seconds à la fonction y. Les équations (5) expriment que les points $a_m, a_{2m}, a_{3m}, \ldots, a'_{m'}, a'_{2m'}, \ldots$, sont des sommets communs aux deux systèmes de parallélogrammes ; les droites du premier réseau, qui passent par ces points, se coupent en d'autres points qui sont également des sommets du second réseau ; l'aire de chacun des parallélogrammes formés par ces droites est égale à mm' fois celle du parallélogramme élémentaire de la fonction x et à $p_1q'_1 - p'_1q_1$ fois celle du parallélogramme élémentaire de la fonction y.

Mais il peut arriver que les parallélogrammes renferment dans leur intérieur des points communs aux deux premiers réseaux. Pour former le troisième réseau de manière que ses sommets comprennent tous les points communs aux deux premiers, on fera mouvoir parallèlement à elle-même la droite oa_1 jusqu'à ce qu'elle passe par une seconde file de sommets communs $c_1, c_2, c_3, \ldots$; puis on joindra l'origine à l'un quelconque de ces points, au point c_1 par exemple ; par les points $a_m, a_{2m}, a_{3m}, \ldots$, on mènera des parallèles à oc_1 ; enfin on prendra sur oc_1 des longueurs $oc_1 = c_1c'_1 = c'_1c''_1, \ldots$, et l'on mènera par les points $c'_1, c''_1 \ldots$ des parallèles à oa_1.

Le déplacement de oa_1 se détermine en cherchant le minimum de b, pour lequel on a

$$a\omega + b\omega' = a_1\omega_1 + b_1\omega'_1,$$

a, b, a_1, b_1 étant des entiers; question qui ne présente pas de difficultés lorsque $m, m', p_1, q_1, p'_1, q'_1$ sont donnés.

232. Substituons aux relations (5) les relations équivalentes

$$(6) \qquad \begin{cases} m\omega = p_1\omega_1 + q_1\omega'_1, \\ a\omega + b\omega' = a_1\omega_1 + b_1\omega'_1. \end{cases}$$

D'après ces relations, le plus petit parallélogramme ayant pour sommets des sommets communs aux deux réseaux, est équivalent à mb fois le parallélogramme élémentaire de la fonction x et à $p_1 b_1 - q_1 a_1$ fois le parallélogramme élémentaire de la fonction y.

Soit d le plus grand commun diviseur entre p_1 et q_1; posons $p_1 = dp_2$, $q_1 = dq_2$,

$$\omega_2 = p_2\omega_1 + q_2\omega'_1,$$
$$\omega'_2 = p'_2\omega_1 + q'_2\omega'_1,$$

les entiers p_2, q_2, p'_2, q'_2 vérifiant la condition $p_2 q'_2 - p'_2 q_2 = 1$. On peut remplacer les périodes ω_1, ω'_1, comme périodes élémentaires, sinon comme périodes elliptiques, par les périodes ω_2, ω'_2, et l'on déduit des relations (6)

$$(7) \qquad \begin{cases} m\omega = d\omega_2, \\ a\omega + b\omega' = r\omega_2 + s\omega'_2; \end{cases}$$

on a d'ailleurs

$$p_1 b_1 - q_1 a_1 = ds.$$

Appelons k_2 le module de la fonction aux périodes elliptiques ω_2, ω'_2, g_2 son paramètre et α_1 une constante choisie convenablement, on sait (n^{os} **210** et **211**) que la fonction

$$y_1 = \lambda(g_2(z + \alpha_1), k_2)$$

s'exprime par une fraction du premier degré à l'aide de

$$y = \lambda(g_1(z + \alpha), k_1).$$

La question proposée est ramenée à la recherche de la relation qui existe entre les deux fonctions x et y_1. Pour cela, nous déterminerons un parallélogramme (Ω, Ω') qui soit compris exactement dans chacun des parallélogrammes (ω, ω') et (ω_2, ω'_2).

Soit d' le plus grand commun diviseur entre b et s; posons

$$b = d'b_1, \quad s = d's_1,$$

puis

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \omega = dd'\Omega, \\ \omega' = t\Omega + s_1\Omega', \end{array} \right.$$

on aura, d'après les relations (7),

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \omega_2 = md'\Omega, \\ \omega'_2 = \left(\dfrac{ad - rm}{s_1} + \dfrac{b_1 t}{s_1}\right)\Omega + b_1\Omega'. \end{array} \right.$$

Puisque b_1 et s_1 sont premiers entre eux, on peut choisir t de manière que $\dfrac{ad - rm}{s_1} + \dfrac{b_1 t}{s_1}$ soit un entier t_1. Désignons par K le module de la fonction aux périodes Ω, Ω' et par G son paramètre, par α_2 et α_3 deux constantes choisies convenablement, on aura (n° 207)

$$\lambda(G(z + \alpha_2), K) = f[\lambda(z, k)],$$
$$\lambda(G(z + \alpha_3), K) = \varphi[\lambda(g_2 z, k_2)],$$

f et φ étant les caractéristiques de deux fonctions rationnelles, la première du degré ds et la seconde du degré mb; il en résulte, en désignant par α_1 une constante qui dépend des deux constantes α_2 et α_3,

$$f[\lambda(z, k)] = \varphi[\lambda(g_2(z + \alpha_1), k_2)], \quad f(x) = \varphi(y_1),$$

et, en remplaçant y_1 par sa valeur en y,

$$(10) \qquad f[\lambda(z, k)] = \psi[\lambda g(z+\alpha), k_1], \quad f(x) = \psi(y),$$

α étant une constante déterminée.

L'équation (10) contiendra donc les variables x et y sépa-

rées, la première au degré ds, la seconde au degré mb. De cette intégrale particulière on déduit aisément l'intégrale générale de l'équation (1) pour le système de valeurs g_1, k_1 considéré; cette intégrale est donnée par l'équation

$$f[\lambda(z + C, k)] = \psi[\lambda(g_1 z, k_1)],$$

C étant une constante arbitraire.

Ainsi, à l'aide de la fonction auxiliaire au module K, la question proposée se ramène immédiatement à celle traitée au chapitre IV, et l'équation entre x et y peut toujours être mise sous une forme telle, que les variables soient séparées. Il résulte également du chapitre III, que cette équation est résoluble par rapport à chacune des variables.

233. Nous allons examiner d'abord quelques cas particuliers.

1°. On demande que $k_1 = k$.

Dans ce cas, on a

$$g_1 \omega_1 = \omega, \qquad g_1 \omega'_1 = \omega';$$

par suite les relations (5) deviennent

$$(11) \qquad \begin{cases} m g_1 \omega = p_1 \omega + q_1 \omega', \\ m' g_1 \omega' = p'_1 \omega + q_1 \omega', \end{cases}$$

ou

$$(12) \qquad \begin{cases} m g_1 = p_1 + q_1 \rho, \\ m' g_1 \rho = p'_1 + q'_1 \rho, \end{cases}$$

en désignant par ρ le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$.

Lorsque le module k est réel, on peut supposer $\rho = ri$, r étant réel. Si l'on veut que g_1 soit réel, il faut prendre

$$q_1 = p' = 0,$$

puis

$$g_1 = \frac{p_1}{m} = \frac{q}{m} = \frac{p}{q},$$

p et q étant deux entiers premiers entre eux. Alors on aura

$$\lambda(g_1 z, k_1) = \lambda\left(\frac{p}{q} z, k\right).$$

Si g_1 n'est pas réel, p'_1 et q_1 seront différents de zéro, et l'on tire des équations (12)

$$m' q_1 \rho^2 + (m' p_1 - m p'_1)\rho - m p'_1 = 0;$$

donc il faut alors que ρ soit racine d'une équation du second degré à coefficients entiers, et par suite de la forme

(13) $$\rho = \frac{a + b\sqrt{-c}}{d},$$

a, b, d, c étant des entiers dont le dernier est nécessairement positif. On aura, en outre

(14) $$g_1 = \frac{p_1 + q_1 \rho}{m} = \frac{a' + b'\sqrt{-c}}{d'}.$$

Réciproquement, si les quantités ρ et g_1 sont de la forme (13) et (14), les fonctions $\lambda(g_1(z+\alpha), k)$ et $\lambda(z, k_1)$ satisferont à l'équation (1). En effet, ces relations peuvent s'écrire

$$\frac{d' g_1 - a'}{b'} = \frac{d\rho - a}{b} = \sqrt{-c},$$

ou

$$\frac{d' g_1 - a'}{b'} = \frac{d\rho - a}{b}, \quad \frac{d' g_1 - a'}{b'} \cdot \frac{d\rho - a}{b} - c = 0,$$

qui prennent la forme (12).

2°. On suppose

$$k_1 = k' = \sqrt{1 - k^2}.$$

On a alors

$$g_1 \omega_1 = \frac{2\omega'}{i}, \quad g_1 \omega'_1 = \frac{i\omega}{2},$$

d'où

$$2 m g_1 i = 4 p_1 \rho - q_1,$$
$$2 m' g_1 \rho i = 4 p'_1 \rho - q'_1.$$

Supposons k réel et $\rho = ri$, r étant réel; pour que g_1 soit réel, il faut faire $p'_1 = q_1 = 0$, il en résulte

$$g_1 = \frac{2 p_1}{m} r = \frac{q'_1}{2 m' r},$$

c'est-à-dire

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{q'_1 m}{p_1 m'}}, \quad g = \sqrt{\frac{p_1 q'_1}{mm'}}.$$

Si l'on ne demande pas que g_1 soit réel, ρ devra être racine d'une équation du second degré à coefficients entiers, ou de la forme $\frac{a + b\sqrt{-c}}{d}$, il faudra ensuite que l'on ait

$$g_1 = \frac{b'\sqrt{c} + a'\sqrt{-1}}{d'};$$

et cela suffit.

234. Revenons au cas général. Désignons par ρ_1 le rapport des périodes $\frac{\omega'_1}{\omega_1}$. Si les fonctions aux périodes ω, ω' et ω_1, ω'_1 sont liées par une équation algébrique, il faut que l'on ait

$$\rho = \frac{A + B\rho_1}{C + D\rho_1}.$$

Supposons cette condition remplie. Parmi les divers systèmes de périodes qui la vérifient, si l'on prend ceux qui satisfont aux relations

$$\omega = A\Omega + B\Omega',$$
$$\omega' = C\Omega + D\Omega',$$

on sait que la fonction aux périodes Ω, Ω' s'exprimera algébriquement par la fonction aux périodes ω, ω'. Pour qu'il y ait une relation algébrique entre celle-ci et la fonction aux périodes ω_1, ω'_1, qui a même module que la fonction aux périodes Ω, Ω', il faut également qu'il y ait une relation algébrique entre les fonctions dont les périodes sont respectivement ω_1, ω'_1 et Ω, Ω'. Si le rapport ρ_1 n'est pas de la forme $\frac{a + b\sqrt{-c}}{d}$, il faudra que le rapport $\frac{\Omega}{\omega_1} = \frac{\Omega'}{\omega'_1}$ soit commensurable; mais si le rapport ρ_1 a la forme $\frac{a + b\sqrt{-c}}{d}$, le rapport $\frac{\Omega}{\omega_1} = \frac{\Omega'}{\omega'_1}$ pourra avoir une valeur quelconque de la forme $\frac{a' + b'\sqrt{-c}}{d'}$.

CHAPITRE VIII.

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE ENTRE LES MODULES.

Équation différentielle entre le module k de la fonction $\lambda(z, k)$ aux périodes elliptiques ω, ω', et le module k_1 de la fonction $\lambda(g_1 z, k_1)$ aux périodes elliptiques $\frac{\omega}{n}$, ω'.

235. Considérons les deux intégrales définies

$$(1) \qquad A = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

$$(2) \qquad B = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2u^2}}{\sqrt{1-u^2}}\,du,$$

ces deux intégrales étant prises le long d'une même ligne quelconque menée de l'origine au point $u = 1$.

On a

$$B = \int_0^1 \frac{1-k^2u^2}{\sqrt{1-u^2}\,\sqrt{1-k^2u^2}}\,du$$
$$= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} - k^2\int_0^1 \frac{u^2\,du}{\sqrt{1-u^2)(1-k^2u^2)}};$$

Mais en intégrant par parties, on obtient

$$\int_0^1 \frac{u\,du}{\sqrt{1-u^2}}\,\frac{u}{\sqrt{1-k^2u^2}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{(1-k^2u^2)^3}}\,du$$

$$= \frac{1-k^2}{k^2}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)^3}} + \frac{1}{k^2}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}};$$

d'où

$$(3) \qquad B = (1-k^2)\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)^3}}.$$

Dérivons maintenant par rapport au module k les intégrales

A et B, il vient

$$\frac{d\mathrm{A}}{dk} = k\int_0^1 \frac{u^2\,du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u_2)^3}},$$

$$k\frac{d\mathrm{A}}{dk} = -\int^1 \frac{1-k^2u^2}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)^3}} + \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)^3}},$$

c'est-à-dire, d'après la relation (3),

$$(4)\qquad k\frac{d\mathrm{A}}{dk} = -\mathrm{A} + \frac{\mathrm{B}}{(1-k^2)},\quad \text{ou}\quad \mathrm{B} = \left(\mathrm{A} + k\frac{d\mathrm{A}}{dk}\right)(1-k^2).$$

On a de même

$$(5)\qquad k\frac{d\mathrm{B}}{dk} = \mathrm{B} - \mathrm{A},\quad \text{ou}\quad \mathrm{A} = \mathrm{B} - k\frac{d\mathrm{B}}{dk}.$$

Si on élimine B entre les équations (4) et (5), on trouve que A satisfait à l'équation linéaire du second ordre

$$(6)\qquad k(1-k^2)\frac{d^2\mathrm{A}}{dk^2} + (1-3k^2)\frac{d\mathrm{A}}{dk} - k\mathrm{A} = 0.$$

L'une des valeurs de A, celle qui correspond à l'intégrale rectiligne, est $\frac{\omega}{4}$; puisque l'équation (6) est linéaire, ω est l'une des solutions de cette équation. Les diverses valeurs de A sont comprises dans la formule

$$\mathrm{A} = m\frac{\omega}{4} + n\frac{\omega'}{2},$$

dans laquelle m et n désignent des entiers quelconques; donc l'intégrale générale de l'équation (6) est

$$\mathrm{A} = \mathrm{C}\,\omega + \mathrm{C}'\,\omega',$$

ou

$$\mathrm{A} = \mathrm{C}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} + \mathrm{C}'\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2(1-k'^2u^2)}},$$

C et C′ étant deux constantes arbitraires.

236. Soient maintenant Ω, Ω' deux périodes élémentaires

quelconques de la fonction $\lambda(z, k)$; c'est-à-dire deux périodes définies par les formules

$$\Omega = a\omega + b\omega',$$
$$\Omega' = c\omega + d\omega',$$

les entiers vérifiant la condition

$$ab - cd = 1.$$

Les périodes Ω, Ω' satisfont à l'équation différentielle (6), ainsi on a

$$k(1-k^2)\frac{d^2\Omega}{dk^2} + (1-3k^2)\frac{d\Omega}{dk} - k\Omega = 0,$$
$$k(1-k^2)\frac{d^2\Omega'}{dk^2} + (1-3k^2)\frac{d\Omega'}{dk} - k\Omega' = 0;$$

de ces relations on déduit

$$k(1-k^2)\left[\Omega'\frac{d^2\Omega}{dk^2} - \Omega\frac{d^2\Omega'}{dk^2}\right] + (1-3k^2)\left[\Omega'\frac{d\Omega}{dk} - \Omega\frac{d\Omega'}{dk}\right] = 0,$$

et, en intégrant

$$k(1-k^2)\left[\Omega'\frac{d\Omega}{dk} - \Omega\frac{d\Omega'}{dk}\right]$$
$$= k(1-k^2)(ab-cd)\left(\omega'\frac{d\omega}{dk} - \omega\frac{d\omega'}{dk}\right) = C,$$

d'où

$$\Omega'\frac{d\Omega}{dk} - \Omega\frac{d\Omega'}{dk} = \frac{C}{k(1-k^2)},$$

et

(7) $$d\frac{\Omega'}{\Omega} = \frac{C}{k(1-k^2)\Omega^2}dk,$$

C étant une constante indépendante du couple de périodes élémentaires Ω, Ω'.

Désignons par k_1 et g_1 le module et le paramètre de la fonction aux périodes élémentaires

$$\Omega_1 = \frac{\Omega}{n}, \quad \Omega'_1 = \Omega',$$

les quantités $g_1\Omega_1$, $g_1\Omega'_1$ satisfont à l'équation différen-

tielle que l'on obtient en remplaçant dans (7) la variable indépendante k par k_1, et l'on a

$$(8)\quad \begin{cases} d\left(\dfrac{g_1\Omega'_1}{g_1\Omega}\right) = d\left(\dfrac{\Omega'_1}{\Omega_1}\right) = d\left(\dfrac{n\Omega'}{\Omega}\right) \\ = \dfrac{C\,dk_1}{k_1(1-k^2)g_1^2\Omega_1^2}dk_1 = \dfrac{C\,n^2dk_1}{k_1(1-k_1^2)g_1^2\Omega^2}. \end{cases}$$

La comparaison des équations (7) et (8) donne

$$(9)\qquad g_1^2 = n\frac{k(1-k^2)\,dk_1}{k_1(1-k_1^2)\,dk}.$$

En remplaçant dans l'équation (6) A par $g_1\,\Omega_1$ et k par k_1, on obtient

$$\Omega_1\left[(k_1-k_1^3)\frac{d^2g_1}{dk_1^2} + (1-3k_1^2)\frac{dg_1}{dk_1} - k_1g_1\right]$$
$$+\frac{d\Omega_1}{dk_1}\left[2(k_1-k_1^3)\frac{dg_1}{dk_1} + (1-3k_1^2)g_1\right] + (k_1-k_1^3)g_1\frac{d^2\Omega_1}{dk_1^2} = 0,$$

et, en multipliant par g_1,

$$g_1\Omega_1\left[\frac{d(k_1-k_1^3)\dfrac{dg_1}{dk_1}}{dk_1} - k_1g_1\right] + \frac{d(k_1-k_1^3)g_1^2\dfrac{d\Omega_1}{dk_1}}{dk_1} = 0.$$

Mais

$$\frac{g_1^2(k_1-k_1^3)}{dk_1} = \frac{n(k-k^3)}{dk},$$

par suite

$$d\frac{g_1^2(k_1-k_1^3)\dfrac{d\Omega_1}{dk_1}}{dk_1} = d\frac{n(k-k^3)\dfrac{d\Omega_1}{dk}}{dk}\cdot\frac{dk}{dk_1} = nk\,\Omega_1\frac{dk}{dk_1};$$

il en résulte

$$g_1\left[(k_1-k_1^3)\frac{d^2g_1}{dk_1^2} + (1-3k^2)\frac{dg_1}{dk_1} - g_1k_1\right] + nk\frac{dk}{dk_1} = 0.$$

En substituant pour g_1 sa valeur donnée par l'équation (9), n disparaît, et si l'on prend k pour variable indépendante,

on arrive à l'équation suivante trouvée par Jacobi

$$(10)\quad \begin{cases} 2\dfrac{dk_1}{dk}\cdot\dfrac{d^3k_1}{dk^3} - 3\left(\dfrac{d^2k_1}{dk^2}\right)^2 \\ \qquad + \dfrac{d^2k_1}{dk^2}\left[\left(\dfrac{1+k_1^2}{k_1-k_1}\right)\left(\dfrac{dk_1}{dk}\right)^2 - \left(\dfrac{1+k^2}{k-k^3}\right)\right] = 0, \end{cases}$$

qui devient

$$(11)\quad \begin{cases} 2\,(dk\,d^3k_1 - dk_1\,d^3k) - 3\left[(dk\,d^2k_1)^2 - (dk_1\,d^2k)^2\right] \\ \qquad + (dk\,dk_1)^2\left[\left(\dfrac{1+k_1^2}{k_1-k_1^2}\,dk_1\right)^2 - \left(\dfrac{1+k^2}{k-k^3}\,dk\right)^2\right] = 0, \end{cases}$$

en laissant la variable arbitraire quelconque.

Il faut observer que rien, dans les calculs précédents, ne suppose n entier, et il suffit que n soit une constante quelconque. Lorsque n est commensurable, les modules k et k_1 sont liés par une équation algébrique. Ainsi l'équation (10) jouit de la propriété remarquable d'avoir une infinité d'intégrales algébriques de différents degrés, son intégrale générale est déterminée par la relation

$$(12)\qquad \frac{\Omega_1'}{\Omega_1} = n\,\frac{\Omega'}{\Omega} = \frac{\alpha'\omega + \beta'\omega'}{\omega + \beta\omega'},$$

β, α', β' étant trois constantes arbitraires.

LIVRE VI.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES AU MOYEN DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

237. Dans le chapitre I du livre II, nous avons indiqué une méthode générale pour étudier les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles. Nous nous proposons actuellement d'appliquer cette méthode aux équations différentielles de la forme

$$F\left(\frac{du}{dz}, u\right) = 0,$$

dans laquelle F désigne un polynôme entier entre la fonction u et sa dérivée $\frac{du}{dz}$, du degré m par rapport à cette dernière, et ne contenant pas la variable z.

Nous démontrons d'abord qu'à chaque valeur de u correspondent m valeurs de z, augmentées ou diminuées de multiples quelconques de certaines périodes ω, ω', ...

Nous démontrons ensuite que, si à chaque valeur de la variable correspond un nombre limité de valeurs de la fonction u, l'intégrale est la racine d'une équation algébrique entière entre u et une quantité qui est, ou la variable indépendante z elle-même, ou la fonction circulaire $\tang \frac{\pi z}{\omega}$, ou la fonction elliptique $\lambda(gz)$.

Nous concluons de là que, si l'intégrale est monodrome, c'est-à-dire n'a qu'une valeur pour chaque valeur de la variable, elle est, ou une fraction rationnelle, ou une fonction monodrome simplement périodique, ou une fonction monodrome doublement périodique. Dans le premier cas, l'intégrale est le quotient de deux polynômes entiers en z, l'un du degré m, l'autre du degré m au plus. Dans le second

cas, l'intégrale s'exprime par une fraction rationnelle en tang $\frac{\pi z}{\omega}$; dans le troisième cas, par une fraction rationnelle entre la fonction elliptique $\lambda(gz)$ et sa dérivée λ'.

Nous nous occupons spécialement des équations différentielles qui admettent des intégrales monodromes. Nous donnons d'abord les caractères très-simples par lesquels on reconnaît, à l'inspection de l'équation différentielle, si l'intégrale est monodrome, et ensuite nous disons comment on distingue à quelle catégorie elle appartient.

Cette étude directe de l'équation différentielle a une grande importance, elle nous donne d'abord les propriétés fondamentales de la fonction intégrale, et en caractérise la nature. Elle nous permet, en outre, d'effectuer l'intégration, telle qu'on l'entend habituellement, c'est-à-dire d'exprimer la fonction intégrale au moyen de signes convenus, lorsque cela est possible. Nous trouvons la forme de l'expression et nous calculons ensuite les coefficients. Ces coefficients sont de deux sortes, ceux qui entrent dans la composition de l'expression et ceux qui servent à définir la fonction circulaire ou tang $\frac{\pi z}{\omega}$, ou la fonction elliptique $\lambda(gz)$. Nous obtenons les premiers au moyen d'équations du premier degré. Lorsque l'intégrale est simplement périodique, la constante ω, qui entre dans la fonction circulaire, est fournie immédiatement par l'équation différentielle. Lorsque l'intégrale est doublement périodique, les deux constantes g et k, qui définissent la fonction elliptique, sont données par des équations algébriques d'un degré plus ou moins élevé.

238. Nous avons appliqué notre méthode d'intégration aux équations différentielles binômes de la forme

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^m = f(u),$$

et nous avons démontré que, outre les cas où l'intégrale est

rationnelle ou simplement périodique, il existe onze équations différentielles de cette forme qui donnent naissance à des fonctions monodromes doublement périodiques.

Nous avons appliqué la même méthode à d'autres exemples plus compliqués. Voici quelques-uns de ceux que nous avons traités.

L'équation différentielle

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^3 + 3(u-2)^2\left(\frac{du}{dz}\right)^2 + \frac{243}{16}(u-1)^2(u-2)^4 - 4(u-2)^6 = 0$$

admet une intégrale rationnelle

$$u = \frac{z + \frac{9}{2}z^2 - \frac{9}{4}z^3}{1 + \frac{1}{2}z + \frac{9}{4}z^2 - \frac{9}{8}z^3}.$$

L'équation différentielle

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^3 - \left(\frac{du}{dz}\right)^2 - \frac{4}{27}(1 - 2u^2 + 2u^3)^2 + \frac{4}{27} = 0$$

admet une intégrale monodrome simplement périodique, qui a pour expression

$$u = \frac{\frac{\omega}{\pi}\operatorname{tang}\frac{\pi z}{\omega}\left(1 + \operatorname{tang}^2\frac{\pi z}{\omega}\right)}{1 + \frac{\omega}{\pi}\operatorname{tang}^3\frac{\pi z}{\omega}},$$

la période ω étant égale à $\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi i$.

Les équations différentielles

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^3 + 3\left(\frac{du}{dz}\right)^2 + u^6 - 4 = 0,$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^3 - 3\left(\frac{du}{dz}\right)^2 - 2(u^2-1)^3 + 4 = 0,$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^3 + 3u^2\left(\frac{du}{dz}\right)^2 - (u^2-1)^3 - 4u^6 = 0,$$

admettent pour intégrales des fonctions monodromes double-

ment périodiques ayant pour expressions

$$u = \frac{\frac{g}{2g}\lambda^2 - \frac{g}{2} + \frac{1}{2}\lambda'}{\lambda}, \quad \frac{1}{g^2} = 3 + 2\sqrt{3}, \quad k = i(2+\sqrt{3}),$$

$$u = A\lambda^3 + B\lambda + C\lambda\lambda',$$

$$u = \frac{A\lambda^3 + B\lambda + C\lambda\lambda'}{1 - h^2\lambda^2}.$$

Nous en calculons les coefficients.

Nous avons appliqué aussi notre méthode à l'équation du cinquième degré

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^5 + (u^2-1)\left(\frac{du}{dz}\right)^4 - \frac{4^4}{5^5}u^2(u^2-1)^4 = 0,$$

qui a pour intégrale une fonction monodrome doublement périodique

$$u = \frac{A\lambda^4 + B\lambda^2 + C + (D\lambda^2 + E)\lambda'}{\lambda(1 - h^2\lambda^2)}.$$

Dans tous ces exemples, afin de fixer les idées, nous avons supposé que, la variable z partant de $z = 0$, la fonction a la valeur initiale $u = 0$, et la dérivée la valeur correspondante $\left(\frac{du}{dz}\right) = 1$. Pour avoir l'intégrale générale, il suffirait, dans chacune des expressions précédentes, de remplacer la variable z par $z_0 + z$, z_0 étant une constante arbitraire.

Ces derniers exemples ne nous paraissent intégrables par aucun des moyens connus jusqu'à présent.

CHAPITRE PREMIER

PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

$$F\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0,$$

239. Théorème I. — *Étant donnée une équation différentielle de la forme*

$$F\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0, \tag{1}$$

dans laquelle F *désigne un polynôme entier entre la fonction u et sa dérivée $\frac{du}{dz}$, du degré m par rapport à cette dernière, et ne contenant pas la variable z; à chaque valeur de u correspondent m valeurs de z augmentées ou diminuées de multiples quelconques de certaines périodes.*

Soit m le degré de l'équation par rapport à $\frac{du}{dz}$. La variable z part de $z = z_0$, la fonction u ayant la valeur initiale arbitraire u_0, et le coefficient différentiel une valeur déterminée $\left(\frac{du}{dz}\right)_0$, satisfaisant à l'équation. Considérons d'abord u comme la variable et z comme la fonction; à chaque valeur de u correspondent m valeurs de $\frac{dz}{du}$, données par l'équation. Si la variable u, partant de u_0, revient au point de départ après avoir décrit un contour fermé ne comprenant aucun point pour lequel la racine de l'équation (1) devient égale à une autre, le coefficient différentiel $\frac{dz}{du}$ reprendra sa valeur primitive $\left(\frac{dz}{du}\right)_0$, et l'accroissement de z, c'est-à-dire la valeur de l'intégrale le long de ce contour, sera nul. Mais, si le contour fermé décrit par la variable u comprend un ou plusieurs points pour lesquels l'équation admet des racines égales, le coefficient différentiel pourra changer et prendre une valeur différente $\left(\frac{dz}{du}\right)_1$; en faisant décrire à la variable u différents contours fermés, on obtiendra nécessairement les m valeurs du coefficient différentiel

$$\left(\frac{dz}{du}\right)_0, \quad \left(\frac{dz}{du}\right)_1, \quad \left(\frac{dz}{du}\right)_2, \ldots, \quad \left(\frac{dz}{du}\right)_{m-1},$$

qui correspondent à $u = u_0$, et l'intégrale z acquerra les m valeurs correspondantes

$$z_0, \quad z_1, \quad z_2, \ldots, \quad z_{m-1}.$$

Plusieurs contours peuvent conduire à la même valeur de

$\frac{dz}{du}$; nous nous bornons pour le moment à m contours ramenant m valeurs distinctes de $\frac{dz}{du}$.

Supposons maintenant que la variable u, après avoir décrit un quelconque de ces m contours, aille du point u_0 à un point quelconque u du plan, en suivant un certain chemin, par exemple le chemin rectiligne, l'intégrale z prendra m valeurs distinctes au point u. Ainsi à chaque valeur de u correspondent déjà m valeurs de z.

Nous avons fait usage de contours fermés qui donnent au coefficient différentiel $\frac{dz}{du}$ les m valeurs qui correspondent à $u = u_0$. En décrivant un autre contour fermé, on reproduira nécessairement l'une des m valeurs précédentes de $\frac{dz}{du}$. Considérons un contour fermé, comprenant des points pour lesquels l'équation admet des racines égales et ramenant la valeur initiale $\left(\frac{dz}{du}\right)_0$ du coefficient différentiel; désignons par ω l'accroissement de z le long de ce contour. Si l'on fait marcher la variable u de u_0 à u suivant une ligne quelconque, soit directement en partant de l'origine u_0, soit après avoir décrit le contour fermé dont il s'agit, le coefficient différentiel redevenant le même en u_0 et restant par conséquent le même le long de la ligne, on aura la même intégrale définie dans les deux cas; seulement la valeur de z sera augmentée d'une quantité constante ω. Si l'on avait décrit deux fois le même contour fermé, on aurait augmenté la valeur de z de la quantité constante 2ω, et ainsi de suite. Comme on peut ajouter ce contour fermé une ou plusieurs fois avant chacun des chemins dont nous avons parlé précédemment, on voit qu'à chaque valeur de u correspondent actuellement m séries de valeurs de z en progressions arithmétiques dont la raison est ω.

S'il existe un autre contour fermé, ramenant la valeur ini-

tiale $\left(\frac{dz}{du}\right)_0$ du coefficient différentiel avec un accroissement ω' différent de ω, cet accroissement ω' sera une seconde période, et chacune des m valeurs de z pourra être augmentée de multiples quelconques de ω et de ω'. On obtiendra ainsi un certain nombre de périodes que l'on pourra en général réduire à un moindre nombre de périodes distinctes.

Il suffit, pour avoir toutes les périodes, de considérer les contours fermés qui ramènent la valeur initiale $\left(\frac{dz}{du}\right)_0$ du coefficient différentiel, avec divers accroissements $\omega, \omega', \ldots$, de l'intégrale. Imaginons, par exemple, un contour fermé qui ramène la valeur $\left(\frac{dz}{du}\right)_1$ et qui fasse acquérir à l'intégrale la valeur $z_1 + \omega_1$; si, après avoir parcouru ce contour, on décrit en sens inverse le contour qui a produit la valeur z_1, on reviendra à la valeur initiale $\left(\frac{dz}{du}\right)_0$ du coefficient différentiel, l'intégrale ayant alors une valeur telle que $z_0 + \omega$. Ces deux contours réunis forment donc un des contours considérés précédemment.

On conclut de ce qui précède qu'à une même valeur de u correspondent m valeurs de z dont chacune peut être augmentée de multiples de certaines périodes $\omega, \omega', \ldots$,

240. *Remarque I.* — Il peut arriver que l'intégrale définie, le long de chacun des contours fermés qui ramènent la valeur initiale $\left(\frac{dz}{du}\right)_0$, soit nulle. Dans ce cas, à chaque valeur de u correspondent seulement m valeurs de z. D'ailleurs z ne devient infinie que pour un nombre limité de valeurs de u; car lorsque z devient infinie pour une valeur finie de u, $\frac{du}{dz}$ devient nulle; la valeur de u annule donc le terme indépendant de $\frac{du}{dz}$ dans l'équation différentielle. Si l'on considère une fonction symétrique entière des m valeurs de z, telle que leur somme, cette fonction, étant monodrome par rapport à u et n'ayant qu'un nombre limité d'infinis, sera une fonction rationnelle de u. Il

en résulte que z est racine d'une équation du degré m par rapport à z, dans laquelle les coefficients sont des fractions rationnelles de u. Réciproquement, u est une fonction algébrique de z (n° 43).

241. *Remarque II.* — Nous ferons observer que l'intégrale d'une équation différentielle

$$F\left(z, u, \frac{du}{dz}\right) = 0$$

contenant la variable z, F désignant toujours un polynôme entier, ne peut être périodique. Car, lorsque la fonction u est périodique, à des mêmes valeurs de u et de $\frac{du}{dz}$ correspondent une infinité de valeurs de z. Mais l'intégrale peut être algébrique, et même entière ou rationnelle.

242. Théorème II. — *Lorsqu'elle admet un nombre limité de valeurs pour chaque valeur de la variable, l'intégrale est une fonction algébrique, soit par rapport à z, soit par rapport à $\tang \frac{\pi z}{\omega}$, soit par rapport à $\lambda(gz)$.*

Nous allons faire voir d'abord que, lorsque la fonction intégrale admet un nombre limité de valeurs pour chaque valeur de z, elle ne peut avoir plus de deux périodes ; car, si elle avait trois périodes distinctes ω, ω', ω'', elle admettrait un nombre infini de valeurs pour chaque valeur de z. En effet, quand on fait marcher la variable z le long d'une courbe, l'intégrale est bien déterminée. Soient u et u' les valeurs qu'elle acquiert aux points z et z' de cette courbe. On sait que l'on peut déterminer trois nombres entiers m, m', m'', positifs ou négatifs, de manière que la somme $m\omega + m'\omega' + m''\omega''$ diffère infiniment peu d'une quantité donnée $z - z'$. Supposons qu'après avoir fait marcher la variable jusqu'au point z', on lui fasse décrire ensuite le chemin

$$m\omega + m'\omega' + m''\omega'',$$

de telle sorte que la fonction u décrive les contours fermés qui produisent les accroissements $m\omega$, $m'\omega'$, $m''\omega''$, la fonction pren-

drait au point z la valeur u' qu'elle avait au point quelconque z' de la courbe suivant laquelle on a intégré. La fonction aurait ainsi au point z une infinité de valeurs.

On conclut de là que la fonction intégrale ne peut avoir plus de deux périodes. Dans le cas où les périodes sont nulles, l'intégrale, comme nous l'avons fait voir, est donnée par une équation algébrique entre u et z.

Supposons qu'il n'y ait qu'une période distincte ω; à chaque valeur de u correspondent m valeurs de z,

$$z, \quad z_1, \quad z_2, \ldots, \quad z_{m-1},$$

augmentées des multiples de ω, et par conséquent seulement m valeurs de $\tang \frac{\pi z}{\omega}$,

$$\tang \frac{\pi z}{\omega}, \quad \tang \frac{\pi z_1}{\omega}, \quad \tang \frac{\pi z_2}{\omega}, \ldots, \quad \tang \frac{\pi z_{m-1}}{\omega}.$$

Toute fonction symétrique entière de ces quantités, telles que leur somme, la somme de leurs produits deux à deux, etc., sera une fonction monodrome par rapport à u; cette fonction monodrome, ne devenant infinie que pour les valeurs de u en nombre limité qui correspondent à $z = \frac{\omega}{2}$, sera donc une fraction rationnelle de u. Ainsi $\tang \frac{\pi z}{\omega}$ est donnée par une équation du degré m ayant pour coefficients des fractions rationnelles en u. Réciproquement, u sera donnée par une équation ayant pour coefficients des fractions rationnelles en $\tang \frac{\pi z}{\omega}$.

Supposons maintenant que l'intégrale admette deux périodes distinctes ω et ω'. Concevons une fonction elliptique $\lambda(gz)$ définie par l'équation

$$\frac{d\lambda}{dz} = g\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)},$$

et admettant les deux périodes ω et ω'. A chaque valeur de u correspondent m valeurs de z,

$$z, \quad z_1, \quad z_2 \ldots, \quad z_{m-1},$$

augmentées des multiples des deux périodes ω et ω', et par conséquent seulement m valeurs de $\lambda(gz)$,

$$\lambda(gz), \qquad \lambda(gz_1), \ldots, \qquad \lambda(gz_{m-1}).$$

On verra de la même manière que toute fonction symétrique entière de ces quantités, étant monodrome par rapport à u, et n'admettant qu'un nombre limité d'infinis, est une fraction rationnelle en u. On en conclut que $\lambda(gz)$ est donnée par une équation du degré m en λ ayant pour coefficients des fractions rationnelles de u. Réciproquement, u sera donnée par une équation ayant pour coefficients des fractions rationnelles en $\lambda(gz)$.

243. Théorème III. — *Lorsqu'elle est monodrome, l'intégrale est, ou une fraction rationnelle, ou une fonction simplement périodique, ou une fonction doublement périodique.*

Supposons que, par un moyen quelconque, on ait reconnu que l'intégrale de l'équation différentielle

$$F\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$$

est monodrome dans toute l'étendue du plan. D'après ce que nous avons dit dans le théorème précédent, le nombre des périodes ne peut surpasser deux. Si les périodes sont nulles, la fonction, étant algébrique et monodrome, est une fraction rationnelle, c'est-à-dire le quotient de deux polynômes entiers en z, l'un du degré m, l'autre au plus du degré m.

Si la fonction est simplement périodique, elle s'exprimera par une fraction rationnelle en $\tang \frac{\pi z}{\omega}$. Car l'équation entière, qui existe entre u et $\tang \frac{\pi z}{\omega}$, se réduit, dans ce cas, au premier degré par rapport à u.

Si la fonction est doublement périodique, l'équation entière qui existe entre u et $\lambda(gz)$ se réduit, non pas au premier degré, mais au second degré; car, à une même valeur de λ correspondent dans chaque parallélogramme des périodes, deux valeurs de z et, par conséquent, deux valeurs de u. Mais, en ré-

solvant l'équation, on obtient pour u une fraction rationnelle en λ et λ' (nº 78).

Moyens de reconnaître si la fonction intégrale est monodrome.

244. Nous avons démontré que l'intégrale d'une équation différentielle de la forme

$$(1) \qquad F\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0,$$

lorsqu'elle est monodrome, est ou une fraction rationnelle, ou une fonction simplement périodique, ou une fonction doublement périodique. Nous allons maintenant nous occuper des moyens de reconnaître si l'intégrale est monodrome, puis nous dirons comment on distingue à quelle catégorie elle appartient.

Nous avons fait partir la variable z du point $z = z_0$, la fonction u ayant la valeur initiale arbitraire u_0, et le coefficient différentiel une valeur déterminée U_0, satisfaisant à l'équation. Tant que le coefficient différentiel $\frac{du}{dz}$, que, pour abréger, nous représenterons par U, reste racine simple de l'équation proposée, U est une fonction monodrome de u et, par conséquent, u fonction monodrome de z. Voyons ce qui arrive lorsque, z arrivant au point z_1 et u à la valeur u_1, le coefficient différentiel devient racine multiple de l'équation.

Nous distinguerons ces racines multiples en deux sortes : les racines nulles et les racines différentes de zéro.

245. Supposons d'abord que le coefficient devienne égal à une racine multiple U_1, différente de zéro. Posons

$$z = z_1 + z', \qquad u = u_1 + u', \qquad \frac{du'}{dz'} = U.$$

Si u' est une fonction monodrome de z' autour du point $z' = 0$, elle se développera en série convergente suivant les puissances entières croissantes de z',

$$(2) \qquad u' = U_1 z' + a z'^2 + b z'^3 + \ldots;$$

la série commence par un terme du premier degré ayant pour coefficient U_1; car, pour $z' = 0$, la dérivée

$$(3) \qquad \frac{du'}{dz'} = U_1 + 2az' + 3bz'^2 + \ldots$$

doit se réduire à la valeur U_1. La série (2) montre que, réciproquement, z' est une fonction monodrome de u' s'évanouissant avec u', et qui pourra se développer en série convergente suivant les puissances croissantes de u',

$$z' = \frac{1}{U_1} u' + a' u'^2 + b' u'^3 + \ldots.$$

En remplaçant z' par sa valeur dans l'équation (3), on voit que $\frac{du'}{dz'}$ est une fonction monodrome de u'.

Ainsi, lorsque le coefficient différentiel U devient égal à une racine multiple différente de zéro, pour que la fonction intégrale u reste monodrome, il est nécessaire que la fonction implicite U, définie par l'équation

$$F(u, U) = 0,$$

reste elle-même fonction monodrome de u. C'est ce que l'on reconnaîtra aisément par la méthode employée par M. Puiseux pour l'étude des fonctions algébriques.

246. Supposons maintenant que le coefficient différentiel U devienne égal à une racine multiple nulle. Posons, comme précédemment,

$$z = z_1 + z', \qquad u = u_1 + u', \qquad \frac{du'}{dz'} = U;$$

l'équation (1) ne renfermera que des termes infiniment petits contenant en facteurs des puissances de u' et de U.

Comme l'a fait voir M. Puiseux, quand plusieurs racines deviennent égales entre elles en un certain point $z' = 0$, elles se disposent par groupes de n racines qui se permutent le unes dans les autres circulairement, lorsqu'on tourne autour de ce point, et les n racines du groupe se développent en une

série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de z',

$$(4) \qquad U = A u'^{\frac{p}{n}} + B u'^{\frac{p+1}{n}} + C u'^{\frac{p+2}{n}} + \ldots.$$

Nous n'avons pas à nous occuper du cas où le degré du premier terme est égal ou supérieur à l'unité; car, dans ce cas, quand u' tend vers zéro, z' augmente indéfiniment, et la circonstance dont il s'agit ne se présente pour aucune valeur finie de z. Nous supposerons donc l'exposant du premier terme plus petit que l'unité, et nous allons démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction intégrale reste monodrome, c'est que ce premier exposant $\frac{p}{n}$ soit de la forme $\frac{n-1}{n}$ ou $1 - \frac{1}{n}$.

En effet, si la fonction u' est monodrome, elle se développera suivant les puissances entières croissantes de z', et comme la dérivée s'annule avec z', la série ne contiendra pas de termes du premier degré. On aura donc

$$(5) \qquad u' = az'^{n} + bz'^{n+1} + cz'^{n+2} + \ldots;$$

d'où l'on déduit

$$(6) \qquad \frac{du'}{dz'} = naz'^{n-1} + (n+1)bz'^{n} + \ldots.$$

En vertu de la série (5), z' est une fonction de u' qui se développe en série convergente suivant les puissances croissantes de $u'^{\frac{1}{n}}$, de telle sorte que

$$z' = a' u'^{\frac{1}{n}} + b' u'^{\frac{2}{n}} + \ldots.$$

Si l'on remplace z' par sa valeur dans l'équation (6), on aura une série de la forme

$$(7) \qquad \frac{du'}{dz'} = A u'^{\frac{n-1}{n}} + B u'^{\frac{n}{n}} + C u'^{\frac{n+1}{n}} + \ldots.$$

Ceci montre bien que le premier terme de la série (4) doit avoir son exposant $\frac{p}{n}$ irréductible et de la forme $\frac{n-1}{n}$ ou $1-\frac{1}{n}$.

Cette condition est suffisante; car si elle est remplie, l'équation différentielle donnera pour le coefficient différentiel un développement de la forme

$$\frac{du''}{dz'} = A u'^{\frac{n-1}{n}} + B u'^{\frac{n}{n}} + C u'^{\frac{n+1}{n}} + \ldots.$$

En posant

$$u' = u''^n,$$

on obtient

$$\frac{du'}{dz'} = n u''^{n-1} \frac{du''}{dz'} = A u''^{n-1} + B u''^n + C u''^{n+1} + \ldots,$$

et plus simplement

$$\frac{du''}{dz'} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n} u'' + \frac{C}{n} u''^2 + \ldots.$$

Le coefficient différentiel $\frac{du''}{dz'}$ étant une fonction monodrome de u'' ne s'annulant pas pour $u''=0$, la fonction intégrale u'' est une fonction monodrome de z' et, par conséquent, u' est elle-même une fonction monodrome de z'.

247. La fonction intégrale u peut encore acquérir des valeurs multiples d'une autre manière; c'est lorsqu'elle devient infinie pour une valeur finie z_1 de la variable z. L'équation différentielle, ordonnée suivant les puissances décroissantes de $\frac{du}{dz}$, s'écrira

$$(8)\quad \left(\frac{du}{dz}\right)^m + f_1(u)\left(\frac{du}{dz}\right)^{m-1} + f_2(u)\left(\frac{du}{dz}\right)^{m-2} + \ldots + f_m(u) = 0.$$

Nous remarquons d'abord que les coefficients, que nous avons désignés par $f_1(u), f_2(u), \ldots,$ doivent être des fonctions entières de u. Car, si la fonction intégrale est monodrome

dans toute l'étendue du plan, sa dérivée jouit de la même propriété et ne devient infinie que lorsque la fonction u devient elle-même infinie. Or, si l'un des coefficients était une fraction rationnelle en u, il deviendrait infini, ainsi que $\frac{du}{dz}$, pour une valeur finie de u.

Pour voir ce qui arrive quand la fonction u devient infinie pour une valeur finie de la variable, posons

$$u = \frac{1}{v},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{du}{dz} = -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dz}.$$

L'équation différentielle devient

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{dv}{dz}\right)^m - v^2 f_1\left(\frac{1}{v}\right)\left(\frac{dv}{dz}\right)^{m-1} + v^4 f_2\left(\frac{1}{v}\right)\left(\frac{dv}{dz}\right)^{m-2} - \ldots \\ &\qquad\qquad\qquad \ldots \pm v^{2m} f_m\left(\frac{1}{v}\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour que la fonction intégrale v soit monodrome, il faut d'abord, d'après ce que nous venons de dire, que cette nouvelle équation ait tous ses coefficients entiers. Ainsi le polynôme $f_1(u)$ sera au plus du second degré, $f_2(u)$ au plus du quatrième degré, ..., $f_m(u)$ au plus du degré $2m$.

Afin de rendre u infinie, faisons $v = 0$. Si, pour $v = 0$, l'équation (9) n'admet que des racines simples, la fonction v sera monodrome et, par conséquent, la fonction u le sera également. Si l'équation admet des racines multiples, on leur appliquera les caractères donnés précédemment.

248. En résumant ce qui précède, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *Pour qu'une équation différentielle du premier ordre de la forme*

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^m + f_1(u)\left(\frac{du}{dz}\right)^{m-1} + \ldots + f_m(u) = 0$$

admette une intégrale monodrome : 1° *les coefficients* $f_1(u)$, $f_2(u), \ldots, f_m(u)$ *doivent être des polynômes entiers en u et, au plus, le premier du second degré, le second du quatrième degré, . . ., le dernier du degré* $2m$; 2° *quand, pour une certaine valeur de u, l'équation a une racine multiple différente de zéro,* $\frac{du}{dz}$ *doit rester monodrome par rapport à* u; 3° *quand, pour une certaine valeur* u_1 *de u, l'équation a une racine multiple égale à zéro, le premier terme du développement de* $\frac{du}{dz}$, *suivant les puissances croissantes de* $(u-u_1)^{\frac{1}{n}}$, *doit avoir l'exposant* $\frac{n-1}{n}$, *si cet exposant est plus petit que l'unité;* 4° *enfin l'équation différentielle que l'on déduit de la première en posant* $u=\frac{1}{v}$, *doit offrir, pour* $v=0$, *les mêmes caractères.*

Il est évident que ces conditions sont suffisantes.

Moyens de reconnaître l'espèce de la fonction intégrale.

249. Nous avons donné les caractères auxquels on reconnaît si l'intégrale est monodrome. Nous savons d'ailleurs que, lorsqu'elle est monodrome, l'intégrale est, ou rationnelle, ou simplement périodique, ou doublement périodique. Nous allons faire voir maintenant comment on distingue à laquelle de ces trois catégories appartient la fonction intégrale.

Il peut arriver que, u étant considérée comme la variable et z comme la fonction, z devienne infinie quand u tend vers une certaine valeur. Si, pour une valeur finie u_1 de u, l'équation (8) admet une racine nulle, et si le premier terme du développement

$$\frac{du}{dz} = \mathrm{A}(u-u_1)^{\frac{p}{n}} + \ldots$$

a un exposant $\frac{p}{n}$ égal ou supérieur à l'unité, il est évident que, lorsque u tendra vers la valeur u_1, z augmentera indéfiniment.

De même, si, pour $v = 0$, l'équation (9) admet une racine nulle d'un degré égal ou supérieur à l'unité par rapport à v, quand v tendra vers zéro, ou u vers l'infini, z augmentera indéfiniment.

250. Quand aucune de ces circonstances ne se présente, c'est-à-dire quand, dans les équations (8) et (9), les racines nulles sont, par rapport à $u - u_1$ ou à v, d'un degré inférieur à l'unité, z ne devient infinie pour aucune valeur finie ou infinie de u. Il est aisé de voir que, dans ce cas, la fonction intégrale u est doublement périodique. Concevons, en effet, que la variable u se meuve dans toute l'étendue du plan, partant de l'origine $u = u_0$, suivant des chemins rectilignes, et aussi en décrivant les $m - 1$ contours qui font acquérir à $\frac{dz}{du}$ les m valeurs qu'il peut avoir en chaque point. Puisque la fonction z conserve une valeur finie, elle décrira une portion limitée du plan (*fig.* 33).

Fig. 33.

Prenons un point M′ en dehors de cette portion du plan; z étant considérée comme la variable et u comme la fonction, quand z arrivera au point M′, la fonction u aura une valeur déterminée, ainsi que sa dérivée $\frac{du}{dz}$. A ces valeurs de u et de $\frac{du}{dz}$ correspond, dans la portion limitée du plan, un certain point M; le quantité géométrique MM′, que nous désignerons par ω, est une première période. Car, aux deux points M et M′, la fonction u et sa dérivée $\frac{du}{dz}$ ayant les mêmes valeurs, il est clair que, si la variable z, partant de chacun de ces deux points, décrit des lignes égales et parallèles, telles que MN, M′N′, la fonction u aura sur ces deux lignes, aux points correspondants N, N′, la même valeur. Ainsi la portion finie du plan $abcd$ se reproduit à côté une première fois, puis une

seconde fois, et indéfiniment. On obtient de la sorte une bande indéfinie. Prenons, en dehors de cette bande, un point M″; à ce point M″ correspond un point M dans la portion finie du plan *abcd*, et l'on verra de même que la quantité géométrique MM″, que nous désignerons par ω', est une seconde période. Grâce à ces deux périodes ω et ω', la portion limitée du plan *abcd*, se reproduisant dans les deux sens, couvrira tout le plan. Ainsi, dans le cas que nous considérons, la fonction intégrale u est doublement périodique.

Il est évident d'ailleurs que cette condition est nécessaire; car une fonction doublement périodique prend toutes les valeurs, quand la variable z se meut dans un parallélogramme des périodes, et elle décrit un nombre infini de contours quand z augmente indéfiniment. Réciproquement, z ne peut devenir infinie que si u décrit un nombre infini de contours.

251. Considérons maintenant le cas où l'intégrale est rationnelle, et supposons d'abord que le degré du numérateur ne surpasse pas celui du dénominateur. Quand z augmentera indéfiniment, u tendra vers une valeur finie et déterminée u_1. Si l'on pose

$$u = u_1 + u', \quad z = \frac{1}{t},$$

u' se développera suivant les puissances entières croissantes de t pour toutes les valeurs de t inférieures à un certain module, ou pour toutes les valeurs de z supérieures à un certain module, et l'on aura

$$u' = at^n + bt^{n+1} + \ldots.$$

On en déduit

$$t = a'u'^{\frac{1}{n}} + b'u'^{\frac{2}{n}} + c'u'^{\frac{3}{n}} + \ldots,$$

les nouveaux coefficients étant liés aux premiers par les relations

$$a'^n = \frac{1}{a}, \quad ba'^2 + nab' = 0, \ldots$$

En différentiant, on a

$$\frac{du'}{dt} = nat^{n-1} + (n+1)\,bt^{n} + \ldots,$$

$$\frac{du'}{dz} = -t^2\frac{du'}{dt} = -\,nat^{n+1} - (n+1)\,bt^{n+2} + \ldots;$$

si l'on remplace t par sa valeur en fonction de u', il vient

$$(10)\qquad \frac{du'}{dz} = \mathrm{A}u'^{\frac{n+1}{n}} + \mathrm{C}u'^{\frac{n+3}{n}} + \mathrm{D}u'^{\frac{n+4}{n}} + \ldots.$$

Il est à remarquer que, en vertu des relations qui existent entre les coefficients, le coefficient du terme en $u'^{\frac{n+2}{n}}$ est nul. Ainsi, à une valeur finie u_1 de u correspond, dans l'équation différentielle, un groupe de n racines égales à zéro, et telles que le premier terme du développement a un exposant irréductible supérieur à l'unité et de la forme $\frac{n+1}{n}$ ou $1+\frac{1}{n}$, le second terme manquant.

Si le numérateur de la fraction rationnelle est d'un degré plus élevé que le dénominateur, u augmentera indéfiniment avec z; mais $v = \frac{1}{u}$ tendra vers zéro, et, pour $v = 0$, l'équation (9) offrira un groupe de n racines égales à zéro satisfaisant aux conditions énoncées plus haut.

Réciproquement, si l'équation (8) pour une valeur finie u_1 de u, ou l'équation (9) pour $v = 0$, présente un groupe de n racines égales à zéro satisfaisant à ces conditions, c'est-à-dire ayant un développement de la forme (10), la fonction intégrale est algébrique. Car, si l'on pose $u' = u''^{n}$, l'équation (10) devient

$$n\frac{du''}{dz} = \mathrm{A}\,u''^{2} + \mathrm{C}\,u''^{4} + \mathrm{D}\,u''^{5} + \ldots,$$

$$\frac{n\,du''}{\mathrm{A}\,u''^{2} + \mathrm{C}\,u''^{4} + \mathrm{D}\,u''^{5} + \ldots} = dz,$$

$$\left(\frac{\mathrm{A}'}{u''^{2}} + \mathrm{C}' + \mathrm{D}'\,u'' + \ldots\right)du'' = dz;$$

en intégrant et ajoutant une constante arbitraire B', on a

$$-\frac{A'}{u''} + B' + C'u'' + \frac{D'}{2}u''^2 + \ldots = z,$$

$$\frac{-A' + B'u'' + C'u''^2 + \ldots}{u''} = z,$$

$$\frac{u''}{-A' + B'u'' + C'u''^2 + \ldots} = \frac{1}{z} = t.$$

On conclut de là que u'' est une fonction monodrome pour toutes les valeurs de t inférieures à un certain module $\frac{1}{R}$, et qui se développe en série convergente suivant les puissances entières croissantes de t,

$$u'' = \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + \ldots;$$

on a donc

$$u' = at^n + bt^{n+1} + \ldots.$$

Il en résulte que la fonction u conserve une valeur finie pour toutes les valeurs de z extérieures au cercle décrit de l'origine comme centre avec un rayon égal à R; c'est donc une fonction rationnelle.

Lorsque la fonction intégrale n'est ni doublement périodique, ni rationnelle, elle est simplement périodique. C'est d'ailleurs ce que l'on reconnaît directement, lorsque l'équation différentielle, pour une valeur finie de u, ou l'équation (9) pour $v = 0$, admet une racine nulle qui ne présente pas les caractères énoncés plus haut, et en même temps on trouve la période.

252. En résumant ce qui précède, nous avons le théorème suivant :

Théorème. V. — *Lorsque l'équation différentielle remplit les conditions qui rendent l'intégrale monodrome,* 1° *l'intégrale est doublement périodique, si l'équation proposée, pour aucune valeur finie u_1 de u, et la transformée pour $v = 0$, n'admettent de racine nulle d'un degré égal ou supérieur à l'unité par rapport à $u - u_1$ ou à v;* 2° *l'intégrale est rationnelle, si l'équation proposée pour une valeur finie u_1 de u,*

ou la transformée pour $v = 0$, admet un groupe de n racines égales à zéro, dont le développement, suivant les puissances croissantes de $(u - u_1)^{\frac{1}{n}}$ ou de $v^{\frac{1}{n}}$, commence par un terme du degré $\frac{n+1}{n}$, le terme suivant du degré $\frac{n+2}{n}$ étant nul;

3° *autrement la fonction est simplement périodique.*

Quand on a ainsi reconnu la nature de l'intégrale, on peut se proposer de la déterminer à l'aide des éléments connus. Si elle est rationnelle, on trouvera les deux polynômes qui la composent. Si elle est simplement périodique, on l'exprimera rationnellement à l'aide de l'exponentielle ou de la tangente. Si elle est doublement périodique, on l'exprimera rationnellement à l'aide de la fonction elliptique et de sa dérivée; ce qui constitue une véritable intégration au moyen des Tables des fonctions elliptiques.

CHAPITRE II.

ÉTUDE DE L'ÉQUATION BINÔME $\left(\frac{du}{dz}\right)^m = f(u)$.

253. Nous allons appliquer les principes établis dans le chapitre précédent à l'étude de l'équation binôme

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^m = f(n),$$

dans laquelle $f(u)$ désigne un polynôme entier en u et au plus du degré $2m$. Posons

$$f(u) = G(u-a)^q (u-b)^{q'} \ldots;$$

l'équation résolue se mettra sous la forme

$$\frac{du}{dz} = g(u-a)^{\frac{p}{n}} (u-b)^{\frac{p'}{n'}} \ldots,$$

les exposants étant réduits à leur plus simple expression. Nous remarquons d'abord que, pour que l'intégrale soit monodrome,

tous les exposants inférieurs à l'unité doivent être de la forme $1-\frac{1}{n}$; chacun d'eux est au moins égal à $\frac{1}{2}$. La transformée est

$$\frac{dv}{dz}=-gv^{2-\frac{p}{n}-\frac{p'}{n'}-\cdots}(1-av)^{\frac{p}{n}}(1-bv)^{\frac{p'}{n'}}\cdots;$$

la somme des exposants fractionnaires $\frac{p}{n}+\frac{p'}{n'}+\ldots$ ne surpassant pas 2, puisque le degré du polynôme $f(u)$ est au plus égal à $2m$, l'exposant de v sera positif; s'il est inférieur à l'unité, il devra être nul ou de la forme $1-\frac{1}{n_1}$.

254. Considérons d'abord le cas très-simple où le second membre ne contient qu'un seul facteur $(u-a)^{\frac{p}{n}}$. Si l'exposant $\frac{p}{n}$ est inférieur à l'unité, il doit être de la forme $1-\frac{1}{n}$; mais alors l'exposant de v dans la transformée est $1+\frac{1}{n}$; donc l'intégrale est rationnelle et ne devient infinie que pour $z=\infty$; c'est une fonction entière du degré n (n° 251). Si l'exposant $\frac{p}{n}$ est supérieur à l'unité, celui de v étant inférieur à l'unité et devant être de la forme $1-\frac{1}{n}$, il faut que $\frac{p}{n}$ soit égal à $1+\frac{1}{n}$; la fonction est rationnelle et tend vers a quand z augmente indéfiniment. Si l'exposant $\frac{p}{n}$ est égal à l'unité, celui de v est aussi égal à l'unité, l'intégrale est monodrome et simplement périodique.

255. Supposons maintenant que le second membre contienne au moins deux facteurs.

Si le premier exposant $\frac{p}{n}$ est plus grand que l'unité, il n'y aura que deux facteurs, sans quoi la somme des exposants surpasserait deux, puisque chaque exposant est au moins égal

à $\frac{1}{2}$. Le second exposant $\frac{p'}{n'}$ étant inférieur à l'unité et de la forme $1-\frac{1}{n'}$, l'exposant de ν est $1+\frac{1}{n'}-\frac{p}{n}$; étant plus petit que l'unité, il doit être de la forme $1-\frac{1}{n_1}$, d'où

$$\frac{p}{n}=\frac{1}{n'}+\frac{1}{n_1}.$$

Il faut que la somme des deux fractions $\frac{1}{n'}+\frac{1}{n_1}$ surpasse l'unité; il n'y a qu'une manière d'arriver à ce résultat, c'est de prendre $n_1=1$, alors $\frac{p}{n}=1+\frac{1}{n'}$. L'intégrale est rationnelle. On l'obtient aisément par une intégrale binôme. Ainsi l'équation différentielle

$$\frac{du}{dz}=g(u-a)^{\frac{n+1}{n}}(u-b)^{\frac{n-1}{n}}$$

admet une intégrale rationnelle, quel que soit n.

256. Quand le premier exposant $\frac{p}{n}$ est égal à l'unité, il ne peut y avoir que trois facteurs au plus. S'il y en a trois, pour que la somme des deux autres exposants ne surpasse pas l'unité, il faut prendre $\frac{p'}{n'}=\frac{p''}{n''}=\frac{1}{2}$. S'il n'y a que deux facteurs, le second exposant peut aussi être égal à l'unité; s'il est plus petit que l'unité et de la forme $1-\frac{1}{n'}$, pour que l'exposant $\frac{1}{n'}$ de ν soit de la même forme, il faut prendre $n'=2$. Nous trouvons ainsi trois équations différentielles

$$\frac{du}{dz}=g(u-a)\sqrt{(u-b)(u-c)},$$

$$\frac{du}{dz}=g(u-a)(u-b),$$

$$\frac{du}{dz}=g(u-a)\sqrt{u-b},$$

qui admettent des intégrales monodromes et simplement périodiques. On sait intégrer ces équations.

257. Il nous reste maintenant à examiner le cas où tous les exposants sont inférieurs à l'unité. Nous remarquons d'abord que chacun des exposants étant de la forme $1 - \frac{1}{n}$ et, par conséquent, égal ou supérieur à $\frac{1}{2}$, il est impossible que le second membre renferme plus de quatre facteurs, sans quoi la somme des exposants surpasserait 2. Il n'existe même qu'une seule combinaison de quatre facteurs : on l'obtient en prenant les quatre exposants égaux à $\frac{1}{2}$; on a ainsi l'équation différentielle

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = G(u-a)(u-b)(u-c)(u-d),$$

qui admet pour intégrale une fonction monodrome doublement périodique. L'exposant de ν, dans la transformée, étant égal à zéro, la fonction a deux infinis simples dans chaque parallélogramme élémentaire.

Voyons les combinaisons de trois facteurs. Les trois exposants $\frac{p}{n}, \frac{p'}{n'}, \frac{p''}{n''}$ étant de la forme $1 - \frac{1}{n}$, $1 - \frac{1}{n'}$, $1 - \frac{1}{n''}$, l'exposant de ν est

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} - 1.$$

Pour que cet exposant soit positif, il faut que le plus petit des trois nombres n, n', n'' ne surpasse pas 3. Supposant donc ces nombres rangés par ordre de grandeur croissante, nous ne pouvons faire sur le premier d'entre eux n que deux hypothèses, savoir : $n = 2$, $n = 3$.

1°. Soit $n = 2$; l'exposant de ν se réduit à $\frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} - \frac{1}{2}$ Pour que cet exposant soit positif, il faut que le plus petit des deux nombres n' et n'' ne surpasse pas 4; nous pourrons donc faire sur n' trois hypothèses : $n' = 2$, $n' = 3$, $n' = 4$. Si $n' = 2$,

pour que l'exposant de v, qui se réduit à $\frac{1}{n''}$, ait la forme convenable $1-\frac{1}{n_1}$, il faut prendre $n''=2$. Si $n'=3$, l'exposant de v, qui est ici $\frac{1}{n''}-\frac{1}{6}$, doit se réduire à zéro; il faut prendre $n''=6$. Si $n'=4$, l'exposant de v, qui est ici $\frac{1}{n''}-\frac{1}{4}$, devant encore se réduire à zéro, on prendra $n''=4$.

2°. Soit $n=3$; l'exposant de v est $\frac{1}{n'}+\frac{1}{n''}-\frac{2}{3}$. Pour que cet exposant soit positif, il faut prendre $n'=3$, $n''=3$.

Nous trouvons ainsi les quatre équations différentielles

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = G(u-a)(u-b)(u-c),$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^6 = G(u-a)^3(u-b)^4(u-c)^5,$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^4 = G(u-a)^2(u-b)^3(u-c)^3,$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^3 = G(u-a)^2(u-b)^2(u-c)^2,$$

qui admettent pour intégrales des fonctions monodromes doublement périodiques.

258. Examinons enfin les combinaisons de deux facteurs. L'exposant de v devient $\frac{1}{n}+\frac{1}{n'}$; cet exposant, ne pouvant dans le cas actuel surpasser l'unité, sera égal à l'unité ou de la forme $1-\frac{1}{n_1}$. Pour qu'il soit égal à l'unité, il faut prendre $n=n'=2$; on obtient ainsi l'équation différentielle

$$\frac{du}{dz} = g\sqrt{(u-a)(u-b)},$$

qui admet une intégrale monodrome simplement périodique. Si l'exposant de v est inférieur à l'unité et de la forme $1-\frac{1}{n_1}$,

l sera égal ou supérieur à $\frac{1}{2}$; il faut pour cela que le plus petit les deux nombres n et n' ne surpasse pas 4; nous ne pouvons donc faire sur n que les trois hypothèses $n=2$, $n=3$, $n=4$.

1°. Soit $n=2$. L'exposant de v devant être de la forme $1-\frac{1}{n_1}$, les deux nombres n' et n_1 vérifieront l'égalité $\frac{1}{2}+\frac{1}{n'}=1-\frac{1}{n_1}$, ou $\frac{1}{n'}+\frac{1}{n_1}=\frac{1}{2}$. On peut satisfaire à cette égalité de trois manières : en prenant $n'=3$, $n_1=6$, ou $n'=6$, $n_1=3$, ou $n'=4$, $n_1=4$.

2°. Soit $n=3$. Les deux nombres n' et n_1 doivent vérifier l'égalité $\frac{1}{n'}+\frac{1}{n_1}=\frac{2}{3}$, qui admet deux solutions nouvelles, ou $n'=3$, $n_1=3$, ou $n'=6$, $n_1=2$.

3°. Enfin soit $n=4$. Les deux nombres n' et n_1 doivent vérifier l'égalité $\frac{1}{n'}+\frac{1}{n_1}=\frac{3}{4}$, qui n'admet qu'une solution nouvelle $n'=4$, $n_1=2$.

Nous trouvons ainsi les six équations différentielles

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^6 = G\,(u-a)^3\,(u-b)^4,$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^6 = G\,(u-a)^3\,(u-b)^5,$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^4 = G\,(u-a)^2\,(u-b)^3,$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^3 = G\,(u-a)^2\,(u-b)^2,$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^6 = G\,(u-a)^4\,(u-b)^5,$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^4 = G\,(u-a)^3\,(u-b)^3,$$

qui admettent pour intégrales des fonctions doublement périodiques.

259. Il résulte de ce qui précède que, parmi les équations

différentielles de la forme

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^m = f(u),$$

outre les cas particuliers dans lesquels l'intégrale est rationnelle ou simplement périodique, il y en a *onze* qui donnent naissance à des fonctions monodromes doublement périodiques, et il n'y en a que onze. Nous rangerons ces onze équations dans l'ordre suivant :

$$(1) \qquad \left(\frac{du}{dz}\right)^2 = G\,(u-a)\,(u-b)\,(u-c),$$

$$(2) \qquad \left(\frac{du}{dz}\right)^2 = G\,(u-a)\,(u-b)\,(u-c)\,(u-d),$$

$$(3) \qquad \left(\frac{du}{dz}\right)^3 = G\,(u-a)^2\,(u-b)^2,$$

$$(4) \qquad \left(\frac{du}{dz}\right)^3 = G\,(u-a)^2\,(u-b)^2\,(u-c)^2,$$

$$(5) \qquad \left(\frac{du}{dz}\right)^4 = G\,(u-a)^2\,(u-b)^3,$$

$$(6) \qquad \left(\frac{du}{dz}\right)^4 = G\,(u-a)^3\,(u-b)^3,$$

$$(7) \qquad \left(\frac{du}{dz}\right)^4 = G\,(u-a)^2\,(u-b)^3\,(u-c)^3,$$

$$(8) \qquad \left(\frac{du}{dz}\right)^6 = G\,(u-a)^3\,(u-b)^4,$$

$$(9) \qquad \left(\frac{du}{dz}\right)^6 = G\,(u-a)^3\,(u-b)^5,$$

$$(10) \qquad \left(\frac{du}{dz}\right)^6 = G\,(u-a)^4\,(u-b)^5,$$

$$(11) \qquad \left(\frac{du}{dz}\right)^6 = G\,(u-a)^3\,(u-b)^4\,(u-c)^5.$$

Ces fonctions se distinguent les unes des autres par les infinis. La valeur de l'exposant de v dans l'équation transformée montre que, dans chaque parallélogramme des périodes, les deux fonctions, définies par les deux équations du second de-

gré, admettent : la première, un infini double; la seconde, deux infinis simples. Les fonctions, données par les deux équations du troisième degré, admettent : la première, un infini triple; la seconde, trois infinis simples. Les trois fonctions du quatrième degré ont : la première, un infini quadruple; la seconde, deux infinis doubles; la troisième, quatre infinis simples. Enfin, les quatre fonctions du sixième degré admettent : la première, un infini sextuple; la seconde, deux infinis triples; la troisième, trois infinis doubles; la quatrième, six infinis simples.

260. Dans le cas actuel, il est facile de vérifier les conséquences auxquelles nous sommes arrivés; car, la fonction inverse étant donnée par une quadrature

$$z = z_0 + \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt[m]{f(u)}},$$

on reconnaît aisément l'existence des périodes en suivant la méthode que nous avons employée, dans le chapitre III du livre II, pour les équations (1) et (2). Prenons comme exemple l'équation (11); si, pour fixer les idées, on suppose qu'à $z = 0$ correspond la valeur initiale $u = 0$, on aura à étudier l'intégrale définie

$$z = \int_0^u \frac{du}{\sqrt[6]{G(u-a)^3(u-b)^4(u-c)^5}}.$$

Marquons dans le plan les trois points a, b, c, et appelons j la quantité $e^{\frac{2\pi i}{6}}$ ou $e^{\frac{\pi i}{3}}$. Quand u décrit une petite courbe fermée autour du point a, la valeur de $\frac{1}{U}$ est multipliée par j^3; de même, quand u tourne autour du point b ou du point c, la valeur de $\frac{1}{U}$ est multipliée par j^2 ou par j.

Désignons par (A) le contour élémentaire que l'on a à considérer lorsque la variable u va en ligne droite de l'origine o à un point voisin du point a (*fig.* 34), puis décrit un petit

cercle autour du point a, et revient à l'origine par la même

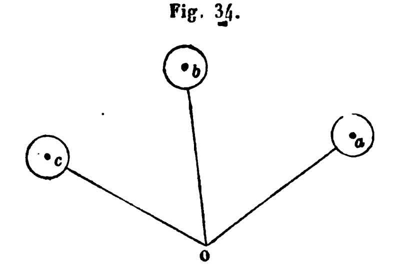


Fig. 34.

ligne droite. Nous désignerons de même par (B) et (C) les contours élémentaires qui se rapportent aux points b et c. Enfin nous représenterons par A, B, C, les valeurs de l'intégrale définie, quand u décrit chacun de ces trois contours, U ayant à l'origine la valeur initiale U_0.

Si la variable u décrit successivement, et dans un ordre quelconque, k fois le contour (A), k' fois le contour (B), k'' fois le contour (C), la valeur de $\frac{1}{U}$ sera multipliée par $j^{3k+2k'+k''}$. Pour avoir les périodes, il faut prendre les combinaisons qui ramènent la valeur initiale U_0 (n° 239), et par conséquent celles pour lesquelles l'exposant $3k+2k'+k''$ est un multiple de 6.

On pourrait prendre deux fois le contour (A), ou trois fois le contour (B), ou six fois le contour (C); mais dans ce cas la valeur de l'intégrale définie est nulle. Par exemple, décrire six fois le contour (C) revient à marcher d'abord suivant le chemin rectiligne oc, puis faire six fois le tour du point c, ce qui ramène la valeur primitive de $\frac{1}{U}$, et enfin revenir à l'origine suivant la droite co; l'intégrale définie le long des petits cercles étant infiniment petite, et les deux chemins rectilignes parcourus en sens inverse avec la même valeur de $\frac{1}{U}$ se détruisant, il est clair que l'intégrale totale est nulle.

On revient aussi à la valeur initiale, quand on parcourt successivement les trois contours (A), (B), (C), ce qui correspond à la solution

$$k = k' = k'' = 1;$$

mais l'intégrale définie est encore nulle. En effet, de l'origine comme centre avec un rayon très-grand, décrivons un cercle

t supposons que la variable parcoure d'abord un rayon, puis a circonférence, et revienne à l'origine par le même rayon. Ce contour équivaut à la somme des trois contours élémentaires pris dans un ordre convenable, et $\frac{1}{U}$ reprend sa valeur primitive; l'intégrale le long de la circonférence infiniment grande étant infiniment petite puisque $\frac{1}{U}$ est un infiniment petit du second degré, et les deux chemins rectilignes se détruisant, l'intégrale totale est nulle. On a donc, en supposant les trois points a, b, c, disposés comme l'indique la figure,

$$A + Bj^3 + Cj^5 = 0.$$

Comme $j^3 = -1$, il résulte de là

$$A = B + Cj^2,$$

et le contour élémentaire (A) peut être remplacé par la somme des deux contours (B) et (C). Il suffit donc, pour avoir toutes les périodes, de combiner les deux contours (B) et (C), de manière que $2k' + k''$ soit égal à 6. Cette équation admet les deux solutions

$$k' = 1,\ k'' = 4 \quad \text{et} \quad k' = 2,\ k'' = 2.$$

Considérons d'abord la solution $k' = 1$, $k'' = 4$, qui indique une fois le contour (B) et quatre fois le contour (C). On peut parcourir ces contours dans différents ordres :

1°. D'abord le contour (B), puis quatre fois successivement le contour (C), ce qui donne l'intégrale définie, ou la première période

$$B + Cj^2 + Cj^3 + Cj^4 + Cj^5 = B - C - Cj = \omega;$$

2°. D'abord une fois le contour (C), puis (B), et ensuite trois fois (C), ce qui donne la seconde période

$$C + Bj + Cj^3 + Cj^4 + Cj^5 = \omega j;$$

3°. D'abord deux fois (C), puis (B), et ensuite deux fois

(C), ce qui donne l'intégrale

$$C + Cj + Bj^2 + Cj^4 + Cj^5 = \omega j^2 = \omega j - \omega;$$

4°. D'abord trois fois (C), puis (B) et ensuite (C), ce qui donne

$$C + Cj + Cj^2 + Bj^3 + Cj^5 = \omega j^3 = -\omega;$$

5°. D'abord quatre fois (C), puis (B), ce qui donne

$$C + Cj + Cj^2 + Cj^3 + Bj^4 = \omega j^4 = -\omega j.$$

On voit que toutes les périodes se ramènent aux deux premières.

Considérons maintenant la solution $k' = 2$, $k'' = 2$. Les trois combinaisons

$$C + Cj + Bj^2 + Bj^4 = C + Cj - B = -\omega,$$
$$B + Cj^2 + Cj^3 + Bj^4 = -\omega j^2,$$
$$B + Bj^2 + Cj^4 + Cj^5 = -\omega j^4,$$

donnent encore des périodes qui se ramènent aux précédentes. Ainsi il n'y a que deux périodes distinctes, ω et ωj.

A chaque valeur de u correspondent six valeurs de z,

$$z,$$
$$C + jz = z',$$
$$C + Cj + j^2 z = z'',$$
$$C + Cj + Cj^2 + j^3 z = 2Cj - z,$$
$$C + Cj + Cj^2 + Cj^3 + j^4 z = 2Cj - z'.$$
$$C + Cj + Cj^2 + Cj^3 + Cj^4 + j^5 z = 2Cj - z''.$$

261. Par des transformations convenables, il est possible d'exprimer, à l'aide des fonctions elliptiques, les onze fonctions doublement périodiques dont nous avons reconnu l'existence.

Si l'on pose

$$u = a + \frac{1}{v},$$

on voit d'abord que l'équation (2) se ramène à l'équation (1),

l'équation (4) à l'équation (3). En posant

$$u = b + \frac{1}{v},$$

on ramène de même les équations (6) et (7) à l'équation (5), les équations (9) et (10) à l'équation (8). En posant

$$u = c + \frac{1}{v},$$

on ramène aussi l'équation (11) à l'équation (8).

Mais on ramène les équations (5) et (8) à l'équation (1), en posant, dans le premier cas,

$$u = b + u'^2,$$

dans le second cas

$$u = b + u'^3.$$

Il reste donc à exprimer, à l'aide des fonctions elliptiques, les fonctions définies par les équations (1) et (3).

Si l'on pose

$$u = a + u'^2,$$

l'équation (1) devient

$$\left(\frac{du'}{dz}\right)^2 = \frac{G}{4}(a - b + u'^2)(a - c + u'^2)$$
$$= \frac{G}{4h^2h'^2}(1 - h^2u'^2)(1 - h'^2u'^2),$$

h^2 et h'^2 désignant les constantes $\frac{1}{b-a}$, $\frac{1}{c-a}$. Si l'on fait maintenant $u' = \frac{u''}{h}$, l'équation se réduit à

$$\left(\frac{du''}{dz}\right)^2 = \frac{G}{4h'^2}(1 - u''^2)\left(1 - \frac{h'^2}{h^2}u''^2\right) = g(1 - u''^2)(1 - k^2u''^2);$$

cette dernière équation admet pour intégrale générale

$$u'' = \lambda(g(z + \alpha), k),$$

α désignant une constante arbitraire.

262. Occupons-nous maintenant de l'équation (3) que, par

une transformation facile, on peut mettre sous la forme

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^3 = (1 - au^2)^2. \tag{12}$$

Nous supposons, pour simplifier, que, dans cette dernière équation, à $z = 0$ correspond la valeur initiale $u = 0$ et $\frac{du}{dz} = 1$. La fonction définie par cette équation différentielle est impaire. Si l'on appelle ω et ω' ses deux périodes, on sait, d'après un raisonnement déjà fait plusieurs fois, que les quatre valeurs $z = 0$, $z = \frac{\omega}{2}$, $z = \frac{\omega'}{2}$, $z = \frac{\omega + \omega'}{2}$, rendent la fonction nulle ou infinie; cette fonction admettant un infini triple, nous pouvons supposer que cet infini triple est $\frac{\omega + \omega'}{2}$, les trois zéros étant 0, $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega'}{2}$. Soit $\lambda(gz, k)$ la fonction elliptique qui admet les deux périodes ω et ω'; il est clair que l'expression de u en fonction de λ aura la forme suivante :

$$u = A\lambda^3 + B\lambda + C\lambda\lambda'. \tag{13}$$

Il s'agit de déterminer les cinq constantes A, B, C, g, k. En différentiant, on a

$$\frac{du}{dz} = g(3A\lambda^2\lambda' + B\lambda' + C\lambda'^2 + C\lambda\lambda'').$$

Aux trois valeurs $z = 0$, $z = \frac{\omega}{2}$, $z = \frac{\omega'}{2}$, correspondent pour $\frac{du}{dz}$ les valeurs 1, $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$, qui sont les trois racines cubiques de l'unité. Si l'on fait $z = 0$, $z = \frac{\omega}{2}$, il vient

$$C + B = \frac{1}{g},$$

$$C - B = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2g};$$

d'où

$$B = \frac{3 - i\sqrt{3}}{4g}, \quad C = \frac{1 + i\sqrt{3}}{4g}.$$

Servons-nous maintenant de la valeur de $\lambda(z)$ développée en série

$$\lambda(z) = z - \frac{1 + k^2}{6} z^3 + \ldots,$$

et posons $z = \frac{\omega'}{2} + z'$, on a

$$\lambda(z) = \frac{1}{k\lambda(z')} = \frac{1}{kz'} + \frac{1 + k^2}{6k} z' + \ldots,$$

$$\lambda'(z) = -\frac{1}{kz'^2} + \frac{1 + k^2}{6k} + \ldots,$$

$$\lambda''(z) = \frac{2}{kz'^3} + \ldots,$$

et en substituant dans la valeur de u, après avoir remplacé z par gz,

$$u = \frac{A - Ck}{g^3 k^3 z'^3} + \frac{A(1 + k^2) + 2Bk^2}{2k^3 g z'} + \ldots.$$

La fonction devant s'évanouir pour $z' = 0$, il en résulte les deux conditions

$$A - Ck = 0, \quad A(1 + k^2) + 2Bk^2 = 0;$$

on en déduit

$$A = Ck = \frac{(1 + i\sqrt{3})k}{4g},$$

$$k^2 - 2i\sqrt{3}.k + 1 = 0;$$

d'où

$$k = i(\sqrt{3} \pm 2).$$

Posons enfin $z = \frac{\omega + \omega'}{2} + z'$, $u = \frac{1}{v^2}$; l'équation différentielle (12) devient

$$\frac{dv}{dz'} = -\frac{1}{3}(a - v^6)^{\frac{2}{3}},$$

d'où

$$v = -\frac{1}{3}a^{\frac{2}{3}}z' + \ldots,$$

et, par suite,

$$u = -\frac{27}{a^2 z'^3} + \ldots.$$

D'un autre côté, la fonction $\lambda(z)$ et ses dérivées, pour $z = \frac{\omega'}{2} + z'$ et $z = \frac{\omega + \omega'}{2} + z'$ ayant des valeurs égales et de signes contraires, on a

$$u = -\frac{A + Ck}{g^3 k^3 z'^3} + \ldots;$$

on en déduit

$$A + Ck = \frac{27 g^3 k^3}{a^2}.$$

Si l'on remplace A et C par leurs valeurs, il vient

$$g^4 = \frac{a^2(1 + i\sqrt{3})}{54 k^2}.$$

Toutes les constantes sont déterminées, et l'intégrale de l'équation (12) est exprimée au moyen de la fonction elliptique $\lambda(gz)$ et de sa dérivée.

Chacune des transformations que nous avons effectuées donne l'intégration d'une équation différentielle. Par exemple, l'équation finie (13) est l'intégrale de l'équation différentielle

$$\frac{du}{\sqrt[3]{(1 - au^2)}} = \frac{d\lambda}{g\sqrt{(1 - \lambda^2)(1 - k^2\lambda^2)}},$$

dans laquelle g et k ont des valeurs convenables.

CHAPITRE III.

EXEMPLES D'INTÉGRATION.

---

263. Revenons à l'équation générale

(1) $$F(u, U) = 0.$$

Soit u_1 une valeur de u pour laquelle l'équation admet une racine double U_1 différente de zéro; on aura

$$(2) \qquad F(u_1, U_1) = 0,$$

$$(3) \qquad \frac{dF(u_1, U_1)}{dU_1} = 0,$$

et si l'on élimine U_1 entre ces deux équations, on obtiendra une équation

$$(4) \qquad \varphi(u_1) = 0,$$

à laquelle devront satisfaire les valeurs de u pour lesquelles U prend des valeurs multiples.

Posons $u = u_1 + u'$, $U = U_1 + U'$; l'équation différentielle devient

$$\frac{d^2F}{dU_1^2}\frac{U'^2}{2} + \ldots + \frac{dF}{du_1}u' + \frac{d^2F}{du_1^2}\frac{u'^2}{2} + \ldots = 0.$$

Comme U' doit rester monodrome par rapport à u' (n° **245**), il est nécessaire que

$$\frac{dF}{du_1} = 0.$$

L'équation (4) n'est autre chose que l'équation (2), dans laquelle on regarde U_1 comme une fonction de u_1 donnée par l'équation (3); on a donc

$$\frac{d\varphi}{du_1} = \frac{dF}{du_1} + \frac{dF}{dU_1}\frac{dU_1}{du_1} = 0.$$

Ainsi l'équation (4) n'aura que des racines doubles; $\varphi(u)$ sera, en général, un carré parfait.

264. Appliquons à l'équation du troisième degré

$$(5) \qquad U^3 + PU^2 + Q = 0,$$

dans laquelle P et Q désignent des polynômes entiers en u, le premier au plus du second degré, le deuxième du sixième degré. Cette équation comprend toutes les fonctions monodromes doublement périodiques du troisième degré; car on sait que, dans une fonction doublement périodique, la somme des m valeurs de z qui, dans chaque parallélogramme, corres-

pondent à une même valeur de u est constante, et, par suite, la somme des m valeurs de $\frac{dz}{du}$ qui correspondent à une même valeur de u est nulle; ainsi le terme du degré $m-1$ en $\frac{dz}{du}$ ou du premier degré en $\frac{du}{dz}$ manque dans l'équation.

On a ici

$$U_1 = -\frac{2}{3}P_1,$$

ce qui donne

$$\varphi(u_1) = \frac{4}{27}P_1^3 + Q_1 = 0.$$

Cette équation n'aura que des racines doubles si le polynôme du sixième degré $\frac{4}{27}P^3 + Q$ est un carré parfait. Nous poserons donc

$$\frac{4}{27}P^3 + Q = R^2,$$

en appelant R un polynôme du troisième degré au plus. Telle est la condition générale à laquelle doit satisfaire l'équation du troisième degré, pour que l'intégrale soit monodrome et doublement périodique.

265. Considérons maintenant une valeur de u annulant Q; à cette valeur u_1 correspondent, dans l'équation (5), des racines égales à zéro. Posons

$$u = u_1 + u';$$

l'équation devient

$$U^3 + \left(P_1 + P'_1 u' + P''_1 \frac{u'^2}{2}\right) U^2 + Q'_1 u' + Q''_1 \frac{u'^2}{1.2} + \ldots = 0.$$

Si u_1 est racine simple de Q et n'annule pas P, U a deux valeurs infiniment petites; le groupe des termes du degré le moins élevé étant $P_1 U^2 + Q'_1 u'$, le premier terme du développement de U suivant les puissances de $u'^{\frac{1}{2}}$ a l'exposant $\frac{1}{2}$, lequel est de

la forme voulue $1-\frac{1}{n}$ (nº 246). Si u_1 est racine double de Q et annule P, U a trois valeurs infiniment petites; le premier groupe étant $U^3+Q''\frac{u'^2}{1.2}$, le premier terme du développement a l'exposant $\frac{2}{3}$ qui est encore de la forme voulue. Ainsi, pour que la fonction intégrale soit monodrome et doublement périodique, il faut que les racines simples de Q n'annulent pas P, et que les racines doubles de Q annulent P. D'ailleurs Q ne doit pas avoir de racine triple.

Si une racine simple de Q annulait P, l'intégrale cesserait d'être monodrome. Si une racine double de Q n'annulait pas P, le premier groupe étant $P_1U^2+Q''_1\frac{u'^2}{2}$, U se développerait suivant les puissances entières de u'; le premier terme étant du premier degré, l'intégrale resterait monodrome, mais serait simplement périodique. Si Q avait une racine triple n'annulant pas P, le premier groupe étant $P_1U^2+Q'''_1\frac{u'^3}{1.2.3}$ et le premier terme du développement ayant l'exposant $\frac{3}{2}$, l'intégrale serait rationnelle (nº 251).

266. Il reste à examiner de la même manière, pour $v=0$, la transformée

$$V^3-\left(\frac{P''_0}{1.2}+P'_0\,v+P_0v^2\right)V^2$$
$$-\left(\frac{Q^{\mathrm{vi}}_0}{1.2\ldots6}+\frac{Q^{\mathrm{v}}_0}{1.2\ldots5}v+\ldots+Q_0v^6\right)=0.$$

Pour que l'intégrale soit doublement périodique, le dernier terme ne devant pas avoir de racine triple pour $v=0$, il faut que le polynôme Q soit au moins du quatrième degré. Désignons par p le degré du polynôme P, et par q celui de Q. Il y a trois cas à considérer : 1º $q=6$; l'équation, pour $v=0$, admet trois racines différentes de zéro; dans ce cas, la fonction doublement périodique a trois infinis simples dans chaque

parallélogramme; 2° $q = 3$; la valeur $v = 0$ étant racine simple du dernier terme et ne devant pas annuler le coefficient de V^2, le polynôme P sera du second degré; comme à $v = 0$ correspondent pour V une racine simple différente de zéro et deux racines égales à zéro, la fonction doublement périodique aura un infini simple et un infini double; 3° $q = 4$; la valeur $v = 0$ étant racine double du dernier terme et devant annuler le coefficient de V^2, le polynôme P sera au plus du premier degré; V ayant trois racines égales à zéro, la fonction doublement périodique aura un infini triple.

267. *Exemple I.* — Soit l'équation différentielle

$$U^3 + 3U^2 - 27u^2 - 4 = 0;$$

nous supposons que la variable part de $z = 0$, la fonction ayant la valeur initiale $u = 0$, et la dérivée la valeur correspondante $U = 1$.

Le polynôme Q n'a que des racines simples qui n'annulent pas P. Le polynôme $\frac{4}{27}P^3 + Q = -27u^2$ est carré parfait. La transformée

$$V^3 - 3v^2V^2 + 27v^4 + 4v^6 = 0,$$

pour $v = 0$, admet une racine triple infiniment petite et du degré $\frac{4}{3}$. Ainsi, en vertu du théorème V (n° **252**), l'intégrale est monodrome et rationnelle; à $v = 0$ correspond seulement $z = \infty$: c'est donc une fonction *entière* du troisième degré.

La variable u n'entrant dans l'équation qu'à des puissances paires, si l'on fait marcher u à partir de l'origine, suivant deux chemins opposés, il est évident que $\frac{dz}{du}$ aura la même valeur le long de ces deux chemins, ce qui donnera pour z des valeurs égales et de signes contraires. On en conclut que, réciproquement, à des valeurs de z égales et de signes contraires correspondent des valeurs de u égales et de signes contraires. Ainsi la fonction entière ne contient que des puissances impaires;

elle est de la forme

$$u = Az^3 + Bz.$$

Pour $z = 0$, $U = 1$; donc $B = 1$. Quant au coefficient A, on le déterminera aisément à l'aide de la transformée. Le premier groupe $V^3 + 27v^4 = 0$ donne $v = \frac{1}{z^3}$; donc $A = 1$. Ainsi l'équation proposée admet pour intégrale

$$u = z^3 + z.$$

268. *Exemple II.* — Soit l'équation différentielle

$$U^3 - 3U^2 - 2(u-1)^2 + 4 = 0.$$

Nous supposons encore que la variable z part de $z = 0$, u ayant la valeur initiale $u = 0$ et U la valeur correspondante $U = 1$.

On reconnaîtra, comme dans l'exemple précédent, que l'intégrale est une fonction entière du troisième degré,

$$u = Az + Bz^2 + Cz^3.$$

Si, au moyen de l'équation proposée, on développe la fonction U,

$$U = 1 + \frac{4}{3}u + \ldots,$$

en s'arrêtant aux deux premiers termes, on en déduit

$$u = z + \frac{2}{3}z^2 + \ldots;$$

d'où

$$A = 1, \qquad B = \frac{2}{3}.$$

La transformée donne immédiatement $C = \frac{2}{27}$. Ainsi l'intégrale est

$$u = z + \frac{2}{3}z^2 + \frac{2}{27}z^3.$$

Ces deux équations différentielles peuvent être intégrées facilement par les procédés ordinaires; on vérifiera ainsi les résultats que nous venons de trouver.

269. *Exemple III.* — Soit l'équation

$$U^3 - U^2 + 4u^3 - 27u^6 = 0.$$

La variable z part toujours de $z = 0$, la fonction ayant la variable initiale $u = 0$ et la dérivée la valeur $U = 1$.

Le polynôme Q a ici une racine triple $u = 0$, à laquelle correspond pour U une racine double infiniment petite et du degré $\frac{3}{2}$ par rapport à u. Le polynôme

$$\frac{4}{27}P^3 + Q = -27\left(u^3 - \frac{2}{27}\right)^2$$

est un carré parfait. La transformée

$$V^3 + v^2V^2 + 27 - 4v^3 = 0$$

n'admet, pour $v = 0$, que des racines simples différentes de zéro. On conclut de là que l'intégrale est monodrome et rationnelle.

Comme elle devient infinie pour trois valeurs finies de z, et infiniment petite du second degré pour $z = \infty$, son dénominateur est du troisième degré, son numérateur du premier degré. L'équation différentielle ne contient que des puissances de u multiples de trois. Car, si l'on fait marcher u à partir de l'origine, suivant un chemin quelconque, puis suivant un autre que l'on déduit du premier, en multipliant u par $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $\frac{dz}{du}$ ayant la même valeur le long de ces deux chemins, z deviendra jz. Réciproquement, quand on remplace u par jz, u devient ju. Ainsi la fraction rationnelle est de la forme

$$u = \frac{z}{Az^3 + 1}.$$

Pour $u = 0$, U a une racine double infiniment petite; le premier groupe $-U^2 + 4u^3 = 0$ donne $u = \frac{1}{z^2}$. Donc $A = 1$, et l'intégrale cherchée est

$$u = \frac{z}{z^3 + 1}.$$

270. *Exemple IV.* — Soit l'équation

$$U^3 + 3(u-2)^2U^2 + \frac{243}{16}(u-1)^2(u-2)^4 - 4(u-2)^6 = 0.$$

La variable part de $z = 0$, la fonction ayant la valeur initiale $u = 0$ et la dérivée la valeur $U = 1$.

Le polynôme Q a une racine quadruple $u = 2$, qui entre deux fois dans P; U admet trois valeurs infiniment petites dont le premier terme du développement a pour exposant $\frac{4}{3}$. Les autres racines de Q sont simples. Le polynôme $\frac{4}{27}P^3 + Q$ est carré parfait. La transformée

$$V^3 - 3(1-2v)^2V^2 + 4(1+2v)^6 - \frac{243}{16}(1-v)^2(1-2v)^4 = 0$$

a trois racines simples pour $v = 0$. On en conclut que l'intégrale est une fraction rationnelle du troisième degré

$$u = \frac{Az^3 + Bz^2 + z}{Cz^3 + Dz^2 + Ez + 1}.$$

Quand z augmente indéfiniment, u tend vers la valeur 2; donc $A = 2C$. Si l'on pose $u = 2 + u'$, l'équation, bornée au premier groupe,

$$U^3 + \frac{243}{16}u'^4 = 0,$$

donne

$$u' = \frac{16}{9}\,\frac{1}{z^3}.$$

Comme

$$u' = \frac{(B-2D)z^2 + (1-2E)z - 2}{Cz^3 + Dz^2 + Ez + 1},$$

il en résulte

$$B = 2D, \qquad E = \frac{1}{2}, \qquad C = -\frac{9}{8}.$$

Si l'on développe la fonction U dont la valeur initiale est 1, suivant les puissances croissantes de u, on a, pour les deux pre-

miers termes,

$$U = 1 + 8u, \quad \text{d'où} \quad u = z + 4z^2,$$

ce qui donne

$$B - E = 4.$$

Nous connaissons maintenant toutes les constantes; l'intégrale cherchée est

$$u = \frac{z + \frac{9}{2}z^2 - \frac{9}{4}z^3}{1 + \frac{1}{2}z + \frac{9}{4}z^2 - \frac{9}{8}z^3}.$$

271. *Exemple V.* — Soit l'équation

$$U^3 - U^2 - 4u^2 + 27u^4 = 0.$$

La variable part de $z = 0$, la fonction ayant la valeur initiale $u = 0$, et la dérivée la valeur $U = 1$.

Le polynôme Q admet la racine double $u = 0$, qui n'annule pas P, et à laquelle correspondent pour U deux racines infiniment petites, monodromes et du premier degré. Le polynôme

$$\frac{4}{27}P^3 + Q = -27\left(u^2 + \frac{2}{27}\right)^2$$

est carré parfait. La transformée

$$V^3 + v^2V^2 + 27v^2 + 4v^4 = 0,$$

pour $v = 0$, admet trois racines infiniment petites du degré $\frac{2}{3}$. On conclut de là que l'intégrale est une fonction monodrome simplement périodique, ayant un infini triple dans chaque période.

La période se produit quand u tourne autour de l'origine, U ayant une valeur infiniment petite. L'équation, bornée au premier groupe

$$U^2 + 4u^2 = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{du}{u} = \pm 2i\,dz,$$

montre que la période est π.

L'équation ne contenant que des puissances paires de u, comme dans l'exemple I, la fonction u change de signe avec z. Donc

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Ceci ne peut avoir lieu que si $z = \frac{\pi}{2}$ est un zéro ou un infini; mais la fonction ne devient nulle que pour $z = 0$ et $z = \infty$; il en résulte que $z = \frac{\pi}{2}$ est l'infini triple.

La fonction simplement périodique u s'exprime rationnellement au moyen de la fonction $\tang z$ qui a la même période π. L'infini étant aussi le même, l'expression est entière, et l'on a

$$u = A \tang z + B \tang^3 z.$$

Pour $z = 0$, $U = 1$; donc $A = 1$. Pour les petites valeurs de u, le développement de la fonction U, dont la valeur initiale est 1, borné aux deux premiers termes, est

$$U = 1 + 4u^2, \qquad \text{d'où} \qquad u = z + \frac{4}{3}z^3;$$

donc $B = 1$. La fonction intégrale a pour expression

$$u = \tang z + \tang^3 z.$$

272. *Exemple VI.* — Soit l'équation

$$U^3 - U^2 - \frac{4}{27}(1 - 2u^2 + 2u^3)^2 + \frac{4}{27} = 0.$$

La variable part de $z = 0$, la fonction ayant la valeur initiale $u = 0$, et la dérivée la valeur $U = 1$.

Le polynôme Q admet la racine double $u = 0$ qui n'annule pas P; les deux valeurs infiniment petites de U sont du premier degré. Quand u tend vers zéro, z augmente indéfiniment, et l'on a la période $\omega = \frac{3\sqrt{3}}{2}\pi i$. Le polynôme $\frac{4}{27}P^3 + Q$ est carré parfait. La transformée

$$V^3 + v^2V^2 + \frac{4}{27}(2 - 2v + v^3)^2 - \frac{4}{27}v^6 = 0,$$

pour $v = 0$, admet trois racines simples

$$V_0 = -\frac{2}{3}\sqrt[3]{2},\qquad V_1 = -\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}.j,\qquad V_2 = -\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}.j^2,$$

$\left(j = e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)$, ce qui fait trois infinis simples. Ainsi l'intégrale est monodrome et simplement périodique. Cette fonction s'exprimera rationnellement au moyen de $\operatorname{tang}\frac{\pi z}{\omega}$.

Si l'on remarque que u ne devient nulle que pour $z = 0$ et $z = \infty$, et que les valeurs de V_0, V_1, V_2 sont les racines d'une équation binôme, on voit que l'expression a la forme

$$u = \frac{\frac{\omega}{\pi}\operatorname{tang}\frac{\pi z}{\omega}\cdot\left(1 + \operatorname{tang}^2\frac{\pi z}{\omega}\right)}{A\operatorname{tang}^3\frac{\pi z}{\omega} + 1}.$$

Pour trouver le coefficient A, développons la fonction U, dont la valeur initiale est 1, pour les très-petites valeurs de u. On a, en se bornant aux trois premiers termes,

$$U = 1 - \frac{16}{27}u^2 + \frac{16}{27}u^3,$$

d'où l'on déduit

$$u = z - \frac{16}{81}z^3 + \frac{4}{27}z^4.$$

En développant de même l'expression de u et identifiant, on trouve

$$A = \frac{\omega}{\pi}.$$

Ainsi l'intégrale cherchée est

$$u = \frac{\frac{\omega}{\pi}\operatorname{tang}\frac{\pi z}{\omega}\left(1 + \operatorname{tang}^2\frac{\pi z}{\omega}\right)}{1 + \frac{\omega}{\pi}\operatorname{tang}^3\frac{\pi z}{\omega}},\qquad \omega = \frac{3\sqrt{3}}{2}\pi i.$$

273. *Exemple VII.* — Soit l'équation

$$U^3 + 3U^2 + u^6 - 4 = 0.$$

La variable part de $z = 0$, la fonction ayant la valeur $u = 0$ et la dérivée la valeur $U = 1$.

Le polynôme Q n'a que des racines simples qui n'annulent pas P. Le polynôme $\frac{4}{27}P^3 + Q$ est carré parfait. La transformée

$$V^3 - 3v^2V^2 - 1 + 4v^6 = 0,$$

pour $v = 0$, se réduit à $V^3 - 1 = 0$ et a trois racines simples différentes de zéro. On en conclut que l'intégrale est monodrome et doublement périodique (n° 252).

Posons $j = e^{\frac{2\pi i}{6}}$. Si l'on remplace z par jz, u devient ju, et la dérivée ne change pas; la fonction change de signe avec z. Les deux périodes sont ω et $j\omega$. La fonction a trois infinis simples,

$$\frac{\omega}{2}, \quad \frac{j\omega}{2}, \quad \frac{j^2\omega}{2},$$

et trois zéros simples,

$$0, \quad \frac{\omega}{1+j}, \quad -\frac{\omega}{1-j}.$$

Nous nous proposons d'exprimer cette fonction doublement périodique au moyen de la fonction elliptique $\lambda(gz, k)$, qui admet les deux périodes ω et $j\omega$. On sait que les deux zéros de la fonction elliptique sont 0 et $\frac{\omega}{2}$, et les deux infinis $\frac{j\omega}{2}$ et $\frac{j^2\omega}{2}$.

La fonction $u\lambda$ n'a plus l'infini $\frac{\omega}{2}$, mais elle a les deux infinis doubles $\frac{j\omega}{2}$ et $\frac{j^2\omega}{2}$; elle s'exprime donc de la manière suivante :

$$(\alpha) \qquad u\lambda = A\lambda^2 + B + C\lambda';$$

le polynôme du second degré en λ ne contient pas de terme du premier degré, puisque la fonction $u\lambda$ ne change pas quand on change le signe de λ.

Il faut déterminer les cinq constantes A, B, C, g, k.

Le développement de la fonction elliptique suivant les puissances croissantes de z est

$$\lambda(gz) = gz - \frac{1+k^2}{1.2.3} g^3 z^3 + \frac{(1+k^2)^2 + 12k^2}{1.2.3.4.5} g^5 z^5 - \ldots,$$

d'où

$$\lambda'(gz) = 1 - \frac{1+k^2}{1.2} g^2 z^2 + \frac{(1+k^2)^2 + 12k^2}{1.2.3.4} g^4 z^4 - \ldots.$$

D'autre part, la fonction implicite U, dont la valeur initiale est l'unité, a pour développement

$$U = 1 - \frac{u^6}{9} + \ldots;$$

d'où

$$u = z - \frac{z^7}{63} + \ldots.$$

En substituant dans l'équation (α) et égalant les coefficients des mêmes puissances de z jusqu'à la quatrième inclusivement, il vient

(1) $$B + C = 0,$$

(2) $$Ag - C\frac{1+k^2}{2} g = 1,$$

(3) $$C\frac{(1+k^2)^2 + 13k^2}{24} g - A\frac{1+k^2}{3} g = -\frac{1+k^2}{6}.$$

L'équation transformée, pour $v = 0$, se réduit à $V^3 - 1 = 0$; les trois racines sont $1, j^2, j^4$. On peut supposer que la première se rapporte à $z = \frac{\omega}{2}$, la seconde à $z = \frac{j\omega}{2}$ et la troisième à $\frac{j^2\omega}{2}$. Posons d'abord $z = \frac{\omega}{2} + z'$, on aura, en se bornant au premier terme,

$$v = z', \qquad \text{d'où} \qquad u = \frac{1}{z'}.$$

Mais on sait que

$$\lambda\left(g\frac{\omega}{2} + gz'\right) = -\lambda(gz') = -gz'.$$

Si l'on substitue dans l'équation (α), il viendra

(4) $$B - C = -g.$$

Posons maintenant

$$z = \frac{j\omega}{2} + z',$$

et remarquons que

$$\lambda\left(g\frac{j\omega}{2} + gz'\right) = \frac{1}{k\lambda(gz')} = \frac{1}{gkz'};$$

on a d'ailleurs

$$v = j^2 z', \quad \text{d'où} \quad u = \frac{-j}{z'}.$$

En substituant dans l'équation (α), il vient

(5) $$A - Ck = -gkj.$$

Si l'on pose

$$z = \frac{j^2\omega}{2} + z',$$

en remarquant que

$$\lambda\left(g\frac{j^2\omega}{2} + gz'\right) = -\frac{1}{gkz'}, \quad v = -jz', \quad u = \frac{j^2}{z'},$$

on aura

(6) $$A + Ck = -gkj^2.$$

Mais nous verrons que cette relation rentre dans les précédentes.

Les équations (1) et (4) donnent

$$C = -B = \frac{g}{2}.$$

Les équations (5) et (6), par soustraction, donnent de même $C = \frac{g}{2}$. Ainsi la relation (6) rentre dans les premières.

De l'équation (5) on déduit

$$A = gk\left(\frac{1}{2} - j\right) = -\frac{gki\sqrt{3}}{2}.$$

Si, pour abréger, on pose

$$(1+k^2)g^2=p, \quad kg^2=q,$$

les équations (2) et (3) donnent

$$p=-2, \quad q=\frac{i}{\sqrt{3}};$$

d'où

$$\frac{1+k^2}{k}=\frac{p}{q}=2\sqrt{3}\,i, \quad k=i(\sqrt{3}\pm 2),$$

$$\frac{1}{g^2}=\frac{k}{q}=3\pm 2\sqrt{3}.$$

Si l'on prend les signes supérieurs, on a finalement

$$k=i(2+\sqrt{3}), \quad \frac{1}{g^2}=3+2\sqrt{3}, \quad C=\frac{g}{2}, \quad B=-\frac{g}{2}, \quad A=\frac{1}{2g},$$

et l'intégrale a pour expression

$$u=\frac{\frac{1}{2g}\lambda^2-\frac{g}{2}+\frac{g}{2}\lambda'}{\lambda}.$$

274. *Exemple VIII.* — Soit l'équation

$$U^3-3U^2-2(u^2-1)^2+4=0.$$

La variable part de $z=0$, la fonction ayant la valeur initiale $u=0$, et la dérivée la valeur $U=1$.

Cette équation présente tous les caractères qui font reconnaître une intégrale monodrome et doublement périodique. Le polynôme Q n'étant que du quatrième degré, cette fonction admet un infini triple. Désignons par ω et ω' les deux périodes. La fonction changeant de signe avec z, ses trois zéros seront ρ, $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega'}{2}$, et son infini triple $\frac{\omega+\omega'}{2}$.

Nous exprimerons encore cette intégrale au moyen de la fonction elliptique λ. La fonction $\frac{u}{\lambda}$, n'admettant plus qu'un infini double $\frac{\omega+\omega'}{2}$, aura une expression de la forme

$$A\lambda^2+B+C\lambda'.$$

On aura donc

$$(\alpha)\qquad u = \lambda(A\lambda^2 + B + C\lambda').$$

Il faut déterminer les cinq constantes A, B, C, g, k.

Pour les valeurs très-petites de z, en se bornant au premier terme, on a

$$u = z,$$

ce qui donne la relation

$$(1)\qquad Bg + Cg = 1.$$

Pour $u = 0$, l'équation différentielle devient

$$U^3 - 3U^2 + 2 = 0;$$

si l'on supprime la solution $U = 1$ qui correspond à $z = 0$, elle se réduit à

$$U^2 - 2U - 2 = 0;$$

d'où

$$U = 1 \mp \sqrt{3}.$$

Faisons correspondre la première racine à $z = \frac{\omega}{2}$, la seconde à $z = \frac{\omega'}{2}$. Posons $z = \frac{\omega}{2} + z'$, nous aurons

$$u = (1 - \sqrt{3})z';$$

d'où l'on déduit, en substituant dans l'équation (α),

$$(2)\qquad Bg - Cg = \sqrt{3} - 1.$$

Posons de même $z = \frac{\omega'}{2} + z'$, nous aurons

$$u = (1 + \sqrt{3})z',$$

et, en substituant dans l'équation (α), nous obtiendrons les deux relations

$$(3)\qquad A = Ck,$$

$$(4)\qquad Bk + C\frac{1 + k^2}{2} = 0.$$

La transformée

$$V^3 + 3v^2V^2 + 2(1 - v^2)^2 v^2 - 4v^6 = 0$$

donne, pour le premier terme du développement,

$$v = -\frac{2}{27} z'^3,$$

en posant $z = \frac{\omega + \omega'}{2} + z'$. Si l'on substitue dans l'équation (α), on trouve la relation

$$(5) \qquad A + Ck = \frac{27}{2} g^3 k^3.$$

Nous avons maintenant un nombre d'équations suffisant pour la détermination des constantes. Les équations (1), (2), (3), donnent

$$Bg = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad Cg = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}, \quad Ag^3 = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} kg^2.$$

Substituant ces valeurs dans les équations (4) et (5), on obtient les deux équations

$$\frac{1 + k^2}{k} = -2(3 + 2\sqrt{3}),$$

$$k^2 g^4 = \frac{2(2 - \sqrt{3})}{27};$$

d'où l'on déduit

$$k = -(3 + 2\sqrt{3}) \pm 2\sqrt{5 + 3\sqrt{3}}, \quad kg^2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{9},$$

$$Bg = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad Cg = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}, \quad Ag^3 = \frac{7 - 5\sqrt{3}}{18},$$

et l'intégrale cherchée a pour expression

$$u = \lambda(A\lambda^2 + B + C\lambda').$$

275. Nous allons vérifier que cette fonction satisfait bien à l'équation différentielle proposée. Voici le calcul de vérification. On a, en différentiant,

$$\frac{U}{g} = (3A\lambda^2 + B)\lambda' + C(\lambda'^2 + \lambda\lambda''),$$

$$\frac{U}{g} = 3Ck^2\lambda^4 + 4Bk\lambda^2 + C + (3A\lambda^2 + B)\lambda';$$

d'où l'on déduit

$$
\begin{aligned}
\frac{U^2}{g^2} = {} & 18C^2k^4\lambda^8 + 48B^2Ck^3\lambda^6 + (29B^2k^2 + 15C^2k^2)\lambda^4 \\
& + [14BC - B^2(1+k^2)]\lambda^2 + (B^2 + C^2) \\
& + 2\lambda'[9C^2k^3\lambda^6 + 15BCk^2\lambda^4 + (3C^2k + 4B^2k)\lambda^2 + BC],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{U^3}{g^3} = {} & 108C^3k^6\lambda^{12} + 432BC^2k^5\lambda^{10} + (549B^2Ck^4 + 135C^3k^4)\lambda^8 \\
& + (238B^3k^3 + 306BC^2k^3)\lambda^6 \\
& + [36C^3k^2 + 168B^2Ck^2 - 12B^3(1+k^2)k]\lambda^4 \\
& + (30BC^2k + 18B^3k)\lambda^2 + (C^3 + 3B^2C) \\
& + \lambda' \left\{ \begin{aligned} & 108C^3k^5\lambda^{10} + 324BC^2k^4\lambda^8 \\ & + (279B^2Ck^3 + 81C^3k^3)\lambda^6 \\ & + (67B^3k^2 + 117BC^2k^2)\lambda^4 \\ & + [33B^2Ck + 9C^3k - B^3(1+k^2)]\lambda^2 \\ & + (3BC^2 + B^3) \end{aligned} \right\}.
\end{aligned}
$$

On a, d'autre part

$$
u^2 = 2A^2\lambda^6 + 4AB\lambda^4 + (B^2 + C^2)\lambda^2 + 2C\lambda^2(A\lambda^2 + B)\lambda',
$$

$$
\begin{aligned}
(u^2 - 1)^2 = {} & 8A^4\lambda^{12} + 32C^3Bk^3\lambda^{10} + (40B^2C^2k^2 + 8C^4k^2)\lambda^8 \\
& + (16B^3Ck + 16BC^3k - 4C^2k^2)\lambda^6 \\
& + [(B^2 + C^2)^2 - 8AB + 4B^2C^2]\lambda^4 - 2(B^2 + C^2)\lambda^2 + 1 \\
& + 4C\lambda^2\lambda' \left\{ \begin{aligned} & 2A^3\lambda^8 + 6A^2B\lambda^6 \\ & + [A(B^2 + C^2) + 4AB^2]\lambda^4 \\ & + [B(B^2 + C^2) - A]\lambda^2 - B \end{aligned} \right\}.
\end{aligned}
$$

En substituant ces valeurs dans l'équation différentielle proposée et tenant compte des relations qui existent entre les cinq constantes, on voit que l'équation est vérifiée.

276. *Exemple IX.* — Soit l'équation

$$
U^3 + 3u^2U^2 - (u^2 - 1)^2 - 4u^6 = 0.
$$

La variable part de $z = 0$, la fonction ayant la valeur initiale $u = 0$, et la dérivé la valeur $U = 1$.

L'intégrale est monodrome et doublement périodique; elle change de signe avec z; elle admet trois zéros simples 0, $\frac{\omega}{2}$,

$\frac{\omega'}{2}$, et trois infinis simples $\frac{\omega+\omega'}{2}$, $+a$, $-a$. La fonction $\frac{u(1-h^2\lambda^2)}{\lambda}$, dans laquelle $\frac{1}{h^2}=\lambda^2(a)$, n'admettant plus que l'infini double $\frac{\omega+\omega'}{2}$, aura une expression de la forme $A\lambda^2+B+C\lambda'$. On a donc

$$(\alpha)\qquad u(1-h^2\lambda^2)=\lambda(A\lambda^2+B+C\lambda').$$

Il s'agit de déterminer les six constantes A, B, C, h, g, k.

Pour $u=0$, l'équation différentielle se réduit à $U^3-1=0$, ce qui donne les trois solutions $U=1$, $U=j^2$, $U=-j$, en représentant toujours par j la quantité $e^{\frac{2\pi i}{6}}$. La première valeur correspond à $z=0$; en se bornant aux deux premiers termes, on a

$$U=1-\frac{5}{3}u^2,\quad \text{d'où}\quad u=z-\frac{5}{9}z^3;$$

en substituant dans l'équation (α), on obtient les deux relations

$$(1)\qquad Bg+Cg=1,$$

$$(2)\qquad Ag^3-B\frac{1+k^2}{6}g^3-C\frac{2(1+k^2)}{3}g^3=-\frac{5}{9}-h^2g^2.$$

Si nous faisons correspondre à $z=\frac{\omega}{2}$ la seconde solution $U=j^2$, nous aurons $u=j^2z'$, d'où

$$(3)\qquad Bg-Cg=-j^2.$$

La troisième solution $U=-j$ convient à $z=\frac{\omega'}{2}$. Il en résulte $u=-jz'$; en substituant dans l'équation (α), on obtient les deux relations

$$(4)\qquad A=Ck,$$

$$(5)\qquad h^2j=Bgk+Ag\frac{1+k^2}{2k}.$$

La transformée

$$V^3 - 3V^2 + 4 + v^2(1 - v^2)^2 = 0,$$

pour $v = 0$, se réduit à $V^3 - 3V^2 + 4 = 0$. Cette équation admet la racine simple $V = -1$ et la racine double $V = 2$. La racine simple correspond à l'infini $z = \frac{\omega + \omega'}{2}$, la racine double aux deux infinis $z = +a$ et $z = -a$. Si l'on pose

$$z = \frac{\omega + \omega'}{2} + z',$$

il vient

$$v = -z', \qquad u = -\frac{1}{z'},$$

ce qui donne la relation

(6) $$A + Ck = -gkh^2.$$

Des équations (1), (3), (4), (6), on déduit

$$Bg = \frac{1 - j^2}{2}, \qquad Cg = \frac{j}{2}, \qquad Ag = \frac{kj}{2} \qquad h^2 g^2 = -j.$$

En substituant ces valeurs dans les équations (5) et (2), et posant, pour abréger,

$$kg^2 = p, \qquad (1 + k^2) g^2 = q,$$

on obtient deux équations du premier degré en p et q, d'où l'on déduit

$$p = \frac{3 - 2i\sqrt{3}}{9}, \qquad q = \frac{-2 - 4i\sqrt{3}}{3}.$$

Ainsi les coefficients sont déterminés, et l'intégrale a pour expression

$$u = \frac{\lambda(A\lambda^2 + B + C\lambda')}{1 - h^2\lambda^2}.$$

277. *Exemple X.* — Soit l'équation

$$U^3 - 3U^2 - 2(1 - u^3)^2 + 4 = 0.$$

La variable part de $z = 0$, la fonction ayant la valeur $u = 0$, et la dérivée la valeur $U = 1$.

L'intégrale est une fonction monodrome doublement pério-

dique. Posons $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$; quand on remplace z par jz, la fonction u devient ju. Ainsi les deux périodes sont ω et $j\omega$. La fonction admet trois zéros simples $0, \frac{\omega}{1-j}, -\frac{\omega}{1-j}$, et trois infinis simples $a, ja, j^2 a$.

Nous intégrerons l'équation différentielle proposée au moyen, non pas de la fonction elliptique $\lambda(z)$, mais de la fonction doublement périodique du second ordre $\varphi(z)$ définie par l'équation

$$\frac{d\varphi}{dz} = \sqrt{1 + k^2\varphi^3},$$

avec la condition $\varphi = 0$ pour $z = 0$.

On peut déterminer la constante k, de manière que cette fonction admette les mêmes périodes ω et $j\omega$; puisque $\varphi(jz) = j\varphi(z)$, elle aura alors les deux zéros 0 et $\frac{\omega}{1-j}$, et l'infini double $-\frac{\omega}{1-j}$. Cette fonction se développe en série de la manière suivante :

$$\varphi = z + \frac{k^2}{8} z^4 + \ldots.$$

La fonction $u(1 - h^3\varphi^3)$ dans laquelle $h^3 = \frac{1}{\varphi^3(a)}$, n'a que l'infini quintuple $-\frac{\omega}{1-j}$. La fonction φ contenant ce même infini au second degré et φ' au troisième degré, le produit $\varphi\varphi'$ le contiendra au cinquième degré, et l'on pourra déterminer la constante A, de manière que la fonction

$$u(1 - h^3\varphi^3) - A\varphi\varphi'$$

ne contienne plus cet infini qu'au quatrième degré; puis la constante B, de manière que la fonction

$$u(1 - h^3\varphi^3) - A\varphi\varphi' - B\varphi^2$$

ne le contienne plus qu'au troisième degré; puis la constante C, de manière que la fonction

$$u(1 - h^3\varphi^3) - A\varphi\varphi' - B\varphi^2 - C\varphi'$$

ne le contienne plus qu'au second degré ; puis la constante D, de manière que la fonction

$$u(1-h^3\varphi^3)-A\varphi\varphi'-B\varphi^2-C\varphi'-D\varphi$$

ne le contienne plus qu'au premier degré. Cette dernière fonction, n'ayant qu'un infini, est une constante E. On a donc

$$u(1-h^3\varphi^3)=A\varphi\varphi'+B\varphi^2+C\varphi'+D\varphi+E.$$

Mais la fonction u s'annulant pour $z=0$, et devenant ju quand on remplace z par jz, les constantes B, C, E sont nulles. On a donc finalement

$$(\alpha)\qquad u(1-h^3\varphi^3)=A\varphi\varphi'+D\varphi.$$

Il faut déterminer les quatre constantes A, D, h. k.

Pour $u=6$, l'équation différentielle se réduit à

$$U^3-3U^2+2=0,$$

et admet les trois solutions

$$U=1,\qquad U=1-\sqrt{3},\qquad U=1+\sqrt{3}.$$

La première correspond à $z=0$; si l'on développe en se bornant aux deux premiers termes, on a

$$U=1+\frac{4}{3}u^3,\qquad u=z+\frac{1}{3}z^4\ ;$$

ce qui donne les deux conditions

$$(1)\qquad A+D=1,$$

$$(2)\qquad 5Ak^2+Dk^2=\frac{8}{3}-8h^3.$$

Nous ferons correspondre la seconde racine à $z=\frac{\omega}{1-j}$. On a ainsi

$$u=(1-\sqrt{3})z',$$

et, comme

$$\varphi'\left(\frac{\omega}{1-j}\right)=-1\qquad \varphi\left(\frac{\omega}{1-j}+z'\right)=-z',$$

on obtient la relation

$$(3) \qquad A - D = 1 - \sqrt{3}.$$

La troisième racine correspond à $z = -\frac{\omega}{1-j}$, et donne la condition

$$(4) \qquad \frac{A k^2}{2} = h^3 (1 + \sqrt{3}).$$

Des équations (1), (3), (4), on déduit

$$D = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad A = \frac{2-\sqrt{3}}{2}, \qquad k^2 = 4 h^3 (5 + 3\sqrt{3}).$$

Substituant dans l'équation (2), il vient

$$h^3 = \frac{9 - 5\sqrt{3}}{9};$$

d'où

$$k^2 = \frac{8\sqrt{3}}{9}.$$

On connaît ainsi la fonction intégrale

$$u = \frac{A\varphi\varphi' + D\varphi}{1 - h^3 \varphi^3}.$$

278. *Exemple XI.* — Prenons pour dernier exemple l'équation du cinquième degré

$$U^5 + (u^2 - 1) U^4 - \frac{4^4}{5^5} u^2 (u^2 - 1)^4 = 0,$$

dans laquelle la variable part de $z = 0$, la fonction ayant la valeur initiale $u = 0$, et la dérivée la valeur $U = 1$.

Pour $u = \pm 1$, l'équation admet cinq racines égales à zéro; ces cinq racines forment un groupe circulaire, tel que, si l'on pose $u = \pm 1 + u'$, le premier terme du développement de U, suivant les puissances croissantes de $u'^{\frac{1}{5}}$, a l'exposant $\frac{4}{5}$.

Pour $u = 0$, outre la racine $U = 1$, l'équation admet quatre racines égales à zéro qui forment deux groupes circulaires

comprenant chacun deux racines, et tels, que le premier terme du développement de chacun d'eux a pour exposant $\frac{1}{2}$.

Les racines multiples différentes de zéro sont données par l'équation

$$U = -\frac{4}{5}(u^2 - 1),$$

obtenue en égalant la dérivée à zéro. En substituant cette valeur dans l'équation proposée, on a l'équation $(u^2-1)^5 = 0$, qui n'a pas d'autre solution que $u = \pm 1$. Ainsi l'équation différentielle n'admet pas de racines multiples différentes de zéro.

La transformée

$$V^5 - (1 - v^2)V^4 + \frac{4^4}{5^5}(1 - v^2)^4 = 0,$$

pour $v = 0$, se réduit à $V^5 - V^4 + \frac{4^4}{5^5} = 0$; elle admet la racine double $V = \frac{4}{5}$ et trois racines inégales données par l'équation du troisième degré

$$V^3 + \frac{3}{5}V^2 + \frac{8}{5^2}V + \frac{4^2}{5^3} = 0.$$

La racine double présente seule quelque difficulté; si l'on pose

$$V = \frac{4}{5} + V',$$

on voit que le premier groupe comprenant un terme en V'^2 et un terme en v^2, V' est monodrome par rapport à v.

L'équation différentielle présente donc tous les caractères qui distinguent les intégrales monodromes doublement périodiques. Cette fonction change de signe avec z. Elle admet un zéro simple et deux zéros doubles $+a$ et $-a$, et cinq infinis simples, $\frac{\omega}{2}, \frac{\omega'}{2}, \frac{\omega + \omega'}{2}, +b$ et $-b$. Pour l'exprimer au moyen de la fonction elliptique $\lambda(gz, k)$ on remarque que la fonc-

Pour déterminer les trois constantes h, g, k, nous poserons :

$$(1 + k^2) g^2 = p, \qquad k g^2 = q, \qquad h^2 g^2 = r.$$

De l'équation (4) on déduit

$$(9) \qquad p = 3 V_1 \left(\frac{V'_1}{V_1^2} - 1 - \frac{5}{2} r \right).$$

Les deux équations (6) et (8), combinées par soustraction et par addition, conduisent aux deux équations suivantes.

$$(10) \qquad q^2 = \frac{2}{5} r \left[\begin{array}{c} \frac{V'_1}{V_1^2} + \frac{V'_2}{V_2^2} + \frac{V'_3}{V_3^2} + \frac{5}{2}\left(\frac{V'_1}{V_1} - V_1 \right) \\ - 1 - \frac{5}{2}\left(\frac{5}{2} V_1 + 1 \right) r \end{array} \right],$$

$$(11) \qquad \begin{array}{l} \frac{5}{2} r \left[\begin{array}{l} \frac{2}{5}\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right)\left(\frac{V'_1}{V_1^2} + \frac{V'_2}{V_2^2} + \frac{V'_3}{V_3^2} + \frac{15}{4}\frac{V'_1}{V_1} - 1 \right) \\ + \frac{V'_3}{V_3^2} - \frac{V'_2}{V_2^2} - \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right)\left(\frac{9}{4} + \frac{5}{2} V_1 \right) r \end{array} \right]^2 \\ = \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{V'_1}{V_1^2} + \left(\frac{1}{V_1} - \frac{5}{4} \right) r \right]^2 \\ \times \left[\frac{V'_1}{V_1^2} + \frac{V'_2}{V_2^2} + \frac{V'_3}{V_3^2} + \frac{5}{2}\left(\frac{V'_1}{V_1} - V_1 \right) - 1 - \frac{5}{2}\left(\frac{5}{2} V_1 + 1 \right) r \right]. \end{array}$$

Cette équation à une seule inconnue r est du troisième degré. La question est donc ramenée à la résolution de deux équations du troisième degré (9) et (11).

FIN.

